

۱- هر معادله به صورت  $y' = f(x)g(y)$  تفکیک پذیر ( جداشدنی ، متغیرهای جداپذیر ) نامیده می شود . برای حل این معادله متغیرهای  $X$  و  $y$  را به صورت زیر تفکیک می کنیم :

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

و پس از انتگرال گرفتن ، جواب معادله با یک ثابت به دست می آید .

۲- هر معادله به صورت  $y' = f(ax + by + c)$  و  $b \neq 0$  با تغییر متغیر  $u = ax + by + c$  به معادله ای تفکیک پذیر تبدیل می شود .

۳- هر معادله خطی مرتبه اول به صورت  $a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$  است که با تقسیم آن بر  $a_1(x)$  به صورت استاندارد  $y' + p(x)y = q(x)$  نوشته می شود . برای حل این معادله عامل انتگرال  $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$  را تشکیل داده و از رابطه  $y = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int \mu(x)q(x) + c \right)$  جواب عمومی را

محاسبه می کنیم .

۴- با فرض  $q(x) = 0$  جواب عمومی معادله همگن  $y' + p(x)y = 0$  برابر است با  $y = ce^{-\int p(x)dx}$  .

۵- اگر یکی از جواب های معادله  $y' + p(x)y = q(x)$  را به صورت  $y_p$  (جواب خصوصی ) حدس زدیم ، جواب معادله عمومی این معادله از رابطه

$$y = y_p + ce^{-\int p(x)dx}$$

به دست می آید . به عبارت دیگر داریم :

جواب معادله همگن + جواب خصوصی = جواب معادله غیر همگن

۶- برخی از معادلات مرتبه اول را با تغییر متغیر می توان به معادله خطی مرتبه اول تبدیل کرد . صورت کلی این نوع معادلات به صورت

$$f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x)$$

با استفاده از تغییر متغیر  $u = f(y)$  به معادله خطی  $u' + p(x)u = q(x)$  تبدیل می شود .

۷- معادله  $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$  وقتی  $\alpha \neq 0, 1$  معادله برنولی نامیده می شود و برای حل آن کافی است دو طرف را بر  $y^\alpha$  تقسیم کنیم تا به معادله

غیر خطی  $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$  تبدیل شود . سپس از تغییر متغیر  $Z = y^{1-\alpha}$  استفاده می کنیم تا به معادله ای خطی بر حسب  $Z$  برسیم . در این

صورت داریم :

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \xrightarrow{z=y^{1-\alpha}} \frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x)$$

۸- هر معادله به شکل  $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha} + c(x)$  در حالتی که  $b(x)$  و  $c(x)$  ناصفر هستند ، معادله ریکاتی نامیده می شود . اگر یک جواب از معادله ریکاتی به شکل  $y = \phi(x)$  داده شده باشد ، برای به دست آوردن جواب معادله از تغییر متغیر  $y = \phi(x) + \frac{1}{z}$  استفاده می کنیم . در این صورت معادله ریکاتی به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می شود .

۹- تابع  $f$  را همگن از درجه  $\alpha$  می نامیم هرگاه برای هر  $t > 0$  داشته باشیم  $f(tx, ty) = t^{\alpha}f(x, y)$  . معادله دیفرانسیلی همگن است که به یکی از دو صورت زیر باشد :

(الف)  $y' = f(x, y)$  که  $f$  همگن از درجه  $\alpha = 0$  است .

(ب)  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  به شرط آن که  $M$  و  $N$  همگن و از درجه یکسانی باشند .

۱۰- برای حل معادله همگن از تغییر متغیر  $u = \frac{y}{x}$  یا  $y = xu$  استفاده می کنیم تا به معادله ای تفکیک پذیر بر حسب  $u$  برسیم .

۱۱- معادله  $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$  مفروض است . در حالتی که  $c = c' = 0$  ، چون درجه صورت و مخرج برابر است این معادله همگن است و در غیر این صورت :

(الف) در حالتی که  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$  دو خط  $ax + by + c = 0$  و  $a'x + b'y + c' = 0$  متقاطع هستند . در این صورت این دو خط را با هم تلاقی داده تا

نقطه  $\omega(\alpha, \beta)$  به دست آید . سپس با انتقال محورهای مختصات به نقطه تلاقی یعنی اعمال تغییر متغیر  $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$  به معادله همگن

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right) \text{ می رسیم .}$$

(ب) اگر  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$  دو خط موازیند و لذا با تغییر متغیر  $u = ax + by$  و  $u' = a + by'$  به معادله ای تفکیک پذیر بر حسب تابع  $u$  و متغیر مستقل  $x$  می رسیم .

۱۲- برخی از معادلات با تعویض نقش  $X$  و  $Y$  یعنی با فرض این که  $X$  تابعی از  $Y$  است ، به معادلاتی مانند معادلات خطی یا برنولی تبدیل می شوند .

۱۳- معادله دیفرانسیل  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  کامل نامیده می شود هرگاه داشته باشیم  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  .

۱۴- اگر معادله  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  کامل باشد ، پاسخ آن با هر یک از دو روش زیر قابل محاسبه است :

$$۱) \int M dx + \int N^* dy = c \quad \left( \frac{\partial N^*}{\partial x} = 0 \text{ یعنی } N \text{ شامل متغیر } x \text{ نیست} \right)$$

$$۲) \int N dy + \int M^* dx = c \quad \left( \frac{\partial M^*}{\partial y} = 0 \text{ یعنی } M \text{ شامل متغیر } y \text{ نیست} \right)$$

۱۵- برای یافتن عامل انتگرال معادله  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  به شرط آن که عامل انتگرال ، تابعی از  $z = z(x, y)$  باشد ، کسر

$$k(z) = \frac{M_y - N_x}{N z_x - M z_y} \text{ را تشکیل داده و از فرمول } \mu = e^{\int k(z) dz} \text{ عامل انتگرال را محاسبه می کنیم .}$$

$$۱۶- \text{ اگر عامل انتگرال معادله } M dx + N dy = 0 \text{ تابعی از } x \text{ باشد یعنی } z = x \text{ آنگاه } \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

$$۱۷- \text{ اگر عامل انتگرال معادله } M dx + N dy = 0 \text{ تابعی از } y \text{ باشد یعنی } z = y \text{ آنگاه } \mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$$

$$۱۸- \text{ اگر عامل انتگرال معادله } M dx + N dy = 0 \text{ تابعی از } xy \text{ باشد یعنی } z = xy \text{ آنگاه } \mu(z) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM} dz}$$

۱۹- هر معادله به شکل  $y(Ax^a y^b + Bx^c y^d) dx + x(A'x^a y^b + B'x^c y^d) dy = 0$  دارای عامل انتگرالی به صورت  $\mu = x^\alpha y^\beta$  است که با ضرب

معادله در  $\mu$  و نوشتن شرط کامل بودن و مقابسه ضرایب یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی بر حسب  $\alpha$  و  $\beta$  به دست می آید .

۲۰- دیفرانسیل های معروف :

$$۱) d(xy) = y dx + x dy$$

$$۲) d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2}$$

$$۳) d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

$$۴) d(\ln(x^r + y^r)) = \frac{rx}{x^r + y^r} dx + \frac{ry}{x^r + y^r} dy$$

$$5) d\left(\tan^{-1} \frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

۲۱- در صورتی که معادله دیفرانسیل به صورت  $y = f(x, y')$  یا  $x = f(y, y')$  باشد، برای حل آن کافی است  $y' = p$  فرض شود و پس از مشتق

(دیفرانسیل) گرفتن از معادله داده شده، جواب معادله را به صورت پارامتری بر حسب  $p$  به دست آورد. در صورت امکان می بایست پارامتر  $p$  بین  $X$  و  $Y$  حذف شود تا جواب به صورت صریح بر حسب  $f(x, y) = C$  به دست آید.

۲۲- منظور از پوش دسته منحنی های  $\phi(x, y, c) = 0$  (یا منحنی هایی) است که بر تمام منحنی ها (و بر هر کدام فقط در یک نقطه) مماس شود.

۲۳- برای به دست آوردن پوشش دسته منحنی های  $\phi(x, y, c) = 0$  کافی است پارامتر  $C$  را بین معادله  $\phi$  و مشتق این معادله نسبت به  $C$  حذف کنیم.

۲۴- هر معادله به شکل  $y = xy' + g(y')$  معادله کلرو نامیده می شود و دارای دو نوع جواب است.

(الف) با جایگذاری  $y' = c$  در معادله کلرو جواب عمومی آن دسته خطوط  $y = cx + g(c)$  هستند.

(ب) جواب تکین معادله، پوشش جواب عمومی است.

۲۵- هر معادله به شکل  $y = x f(y') + g(y')$  معادله لاگرانژ نامیده می شود. برای حل این معادله مانند نکته ۲۱ عمل می کنیم.

۲۶- اگر معادله ای به صورت  $F(y') = 0$  بوده و معادله  $F(t) = 0$  دارای حداقل یک ریشه حقیقی به صورت  $t = k$  باشد، آن گاه  $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$  جواب

عمومی معادله خواهد بود.

۲۷- اگر معادله مرتبه اول و درجه  $n$  ام به صورت  $y^n + p_{n-1}(x, y)(y')^{n-1} + \dots + p_1(x, y) = 0$  قابل تجزیه به صورت

$(y' - q_1(x, y)) \dots (y' - q_n(x, y)) = 0$  باشد، آن گاه هر یک از معادلات  $y' = q_1(x, y), \dots, y' = q_n(x, y)$  را حل کرده و اگر جواب آن ها به

صورت  $\phi_1(x, y, c) = 0, \dots, \phi_n(x, y, c) = 0$  باشد، جواب عمومی معادله اولیه ضرب این جواب ها یعنی  $\phi_1(x, y, c) \times \dots \times \phi_n(x, y, c) = 0$  است

۲۸- هر گاه دو دسته منحنی  $\phi(x, y, c) = 0$  و  $\psi(x, y, k) = 0$  دارای این خصوصیت باشند که تمام منحنی های یک دسته منحنی بر تمام منحنی های

دسته منحنی دیگر عمود باشد، یک دسته را مسیرهای متعامد یا قائم دسته دیگر می نامند.

۲۹- برای به دست آوردن معادله مسیرهای متعامد دسته منحنی های  $\phi$  کافی است ۳ مرحله زیر را انجام دهیم:

**مرحله اول :** معادله دیفرانسیل دسته منحنی های  $\phi$  را با حذف ثابت  $C$  بین معادله  $\phi$  و مشتق آن نسبت به  $X$  به دست آوریم .

**مرحله دوم :**  $y'$  را به  $-\frac{1}{y'}$  تبدیل کنیم تا معادله دیفرانسیل مسیر متعامد به دست آید .

**مرحله سوم :** معادله حاصل را حل کنیم .

۳۰- اگر معادله  $\phi$  در مختصات قطبی داده شود ، برای یافتن معادله مسیره های متعامد ، کافی است در مرحله دوم  $\frac{r}{r'}$  را به  $-\frac{r'}{r}$  تبدیل کنیم .

۱- منظور از یک معادله دیفرانسیل رابطه ای بین یک تابع، متغیر (متغیرهای) مستقل و مشتقات تابع نسبت به آن متغیر (متغیرها) می باشد. در صورتی که فقط یک متغیر مستقل وجود داشته باشد، معادله را معادله دیفرانسیل عادی یا معمولی و اگر بیش از یک متغیر مستقل داشته باشیم، معادله را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا پاره ای می نامیم.

۲- بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله را مرتبه معادله دیفرانسیل می نامیم.

۳- هر معادله دیفرانسیل عادی به صورت  $a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$  را یک معادله دیفرانسیل خطی می نامیم و در غیر این صورت، معادله غیر خطی نامیده می شود. در حالت خاصی که طرف دوم معادله یعنی  $f(x)$  تابع ثابت صفر باشد، آن را همگن (هموزن - بدون طرف دوم) می نامیم.

۴- اگر یک معادله دیفرانسیل را نسبت به بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله بتوان به صورت یک چند جمله ای نوشت، توان مشتق با بالاترین مرتبه را درجه معادله دیفرانسیل می نامند.

۵- هر معادله خطی، از درجه یک است.

۶- تابع  $y = \phi(x)$  را جواب معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$  می نامیم هرگاه دارای مشتق  $n$  ام بوده و در معادله دیفرانسیل صدق کند.

۷- جواب معادله دیفرانسیل از مرتبه  $n$  معمولاً شامل  $n$  ثابت (پارامتر) است و در این صورت جواب عمومی نامیده می شود.

۸- شرط اولیه یک معادله از مرتبه  $n$  به صورت زیر است:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

در این حالت معادله دیفرانسیل را همراه با شرایط اولیه، مسئله مقدار اولیه می نامیم. اگر شرایط در یک نقطه مطرح نشود، به آن شرایط مرزی گفته می شود.

۹- برخی از جواب های یک معادله دیفرانسیل از مقدار دادن به ثابت های موجود در جواب عمومی به دست نمی آیند که آن ها را جواب غیر عادی (تکین، ایزوله) می نامیم.

۱۰- با داشتن معادله دسته منحنی ها، می توان یک معادله دیفرانسیل به دست آورد که دسته منحنی های  $\phi$  در آن صدق کنند. به این صورت که کافی است

بین معادله دسته منحنی ها و مشتقات آن نسبت به  $x$  تا مرتبه  $n$  ام، ثابت های  $C_1, \dots, C_n$  را حذف کنیم.

۱۱- اگر معادله دسته منحنی ها به صورت  $y = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)$  باشد، با بسط دترمینان زیر معادله دیفرانسیل آن ها از مرتبه  $n$  به دست می آید:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) & y \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) & y' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

کانال کتابخانه تخصصی مهندسی مکاسیس

[https://t.me/ebook\\_mechassis](https://t.me/ebook_mechassis)