بسمه تعالی

«تمرینات فصل اول»

۱- کدام یک از توابع داده شده در بازه های تعریف شده پیوسته تکه ای هستند.

a) $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad 0<x<1 \\ 0 & ; \quad 1<x<2 \end{cases}$

پیوسته تکه ای هست

b) $f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad -1<x\leq 0 \\ \frac{1}{x} & ; \quad 0<x<1 \end{cases}$

چون در $x=0$ ناپیوستگی از نوع بی نهایت دارد پیوسته تکه ای نیست

c) $f(x)=\begin{cases} 2 & ; \quad 0\leq x<1 \\ x^2 & ; \quad 1<x<2 \end{cases}$

! q."y

پیوسته تکه ای هست

d) $f(x)=\begin{cases} 1-x & ; \quad -1\leq x<2 \\ \frac{x}{2-x} & ; \quad 2<x\leq 3 \end{cases}$

چون در $x=2$ ناپیوستگی از نوع بی نهایت دارد پیوسته تکه ای نیست

۲- کدام یک از توابع زیر زوج، فرد، یا نه زوج و نه فرد هستند. فرد $f(-x)=-f(x)$ زوج $f(x)=f(-x)$

a) $x+2x^2+3x^3$ $\quad f(-x)=-x+2(-x)^2+3(-x)^3=-x+2x^2-3x^3$ نه زوج نه فرد

$f(x)=x\ln x$ $\quad f(-x)=(-x)\ln(-x)$ دامنه لگاریتم $(0,\infty)$ است یعنی تابع نه زوج است نه فرد

I t-"y=Iq-.; =

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f(-x)=-\frac{1}{x}=-f(x)$ فرد است

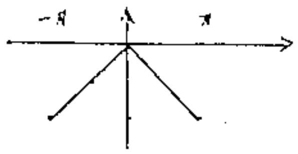
Iq-,1 =n

$f(x)=\sinh x$ $\quad f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\sinh x$ فرد است

$f(x)=e^{x}$ $\quad f(-x)=e^{-x}$ نه زوج نه فرد

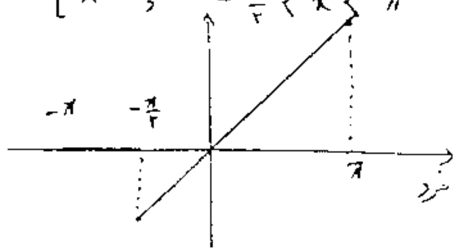
$f(x)=e^{|x|}$ $\quad f(-x)=e^{|-x|}=e^{|x|}$ زوج

b) $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad -\pi<x<0 \\ -x & ; \quad 0<x<\pi \end{cases}$



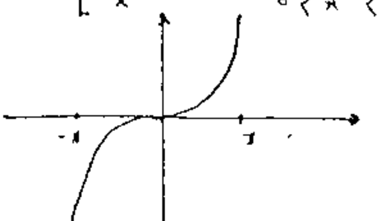
تابع زوج

c) $f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad -\pi<x<-\frac{\pi}{2} \\ x & ; \quad -\frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$



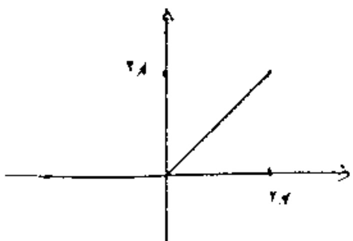
نه زوج نه فرد

d) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \quad -\pi<x<0 \\ x^2 & \quad 0<x<\pi \end{cases}$



تابع فرد

e) $f(x)=|x| \quad 0<x<2\pi$ نه زوج نه فرد



۳-

الف) $\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_b^{b+p} f(x)\,dx$

می‌دانیم: $\int_a^{a+2p} f(x)\,dx = \int_{-p}^{p} f(x)\,dx$ ① $\quad \int_b^{b+2p} f(x)\,dx = \int_{-p}^{p} f(x)\,dx$ ②

$①,② \Rightarrow \int_a^{a+2p} f(x)\,dx = \int_b^{b+2p} f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,dx + \int_{a+p}^{a+2p} f(x)\,dx = \int_b^{b+p} f(x)\,dx + \int_{b+p}^{b+2p} f(x)\,dx$ ⊛

$\int_{a+p}^{a+2p} f(x)\,dx = \int_{(a+p)-p}^{(a+2p)-p} f(x-p)\,dx = \int_a^{a+p} f(x)\,dx$ (به علت متناوب بودن با دوره p)

$\Rightarrow \int_{a+p}^{a+2p} = \int_a^{a+p} f(x)\,dx$ به همین ترتیب $\Rightarrow \int_{b+p}^{2p+b} f(x)\,dx = \int_b^{b+p} f(x)\,dx$

$⊛ \Rightarrow 2\int_a^{a+p} f(x)\,dx = 2\int_b^{b+p} f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_b^{b+p} f(x)\,dx$

ب) $\int_a^{a+2p} f(x)\,dx = \int_a^{0} f(x)\,dx + \int_0^{p} f(x)\,dx + \int_p^{2p} f(x)\,dx + \int_{2p}^{2p+a} f(x)\,dx = \cancel{-\int_0^{a} f(x)\,dx} +$

$\int_0^{p} f(x)\,dx + \int_{-p}^{0} \underbrace{f(x-2p)}_{f(x)}\,dx + \cancel{\int_0^{a} \underbrace{f(x-2p)}_{f(x)}\,dx} = \int_{-p}^{p} f(x)\,dx$

۴- سری فوریه مثلثاتی توابع زیر را بیابید.

a) $f(x) = x + \sin x \qquad -\pi < x < \pi$

$f(x) = g(x) + \sin x$

$g(x) = x \qquad -\pi < x < \pi \qquad a_n = 0$ به علت فرد بودن g

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx \Rightarrow \pi b_n = 2\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx = 2\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$

$b_n = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx \Rightarrow f(x) = \sin x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

$$b)\begin{cases} f(x)=\sin\frac{\pi x}{l} & ; \quad 0<x<l \\ f(x)=f(-x) & ; \quad -l<x<0 \end{cases}$$

$b_n=0$ به علت زوج بودن f

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}\,dx=\frac{4}{\pi} \quad , a_1=0$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad n\geq 2$$

$$2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x=\sin(1+n)\frac{\pi}{l}x+\sin(1-n)$$

$$l\,a_n=\int_0^l\left(\sin(1+n)\frac{\pi}{l}x+\sin(1-n)\frac{\pi}{l}x\right)dx=\frac{-l}{\pi(1+n)}\cos(1+n)\frac{\pi}{l}x\Big]_0^l-\frac{l}{\pi(1-n)}\cos(1-$$

$$a_n=\frac{-1}{\pi(1+n)}\left[(-1)^{n+1}-1\right]-\frac{1}{\pi(1-n)}\left[(-1)^{1-n}-1\right]=-\frac{1}{\pi}\left[(-1)^{n+1}-1\right]\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-}\right.$$

$$a_n=\frac{2\left[(-1)^n+1\right]}{\pi(1-n^2)}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$c)\ f(x)=\sinh x \quad ; \quad -1<x<1$

f فرد است پس $a_n=0$

$$b_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\sinh x\sin n\pi x\,dx=2\int_0^1\frac{e^x-e^{-x}}{2}\sin n\pi x\,dx=\int_0^1 e^x\sin n\pi x\,dx-\int_0^1 e^{-x}\sin n\pi x\,dx=I$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$$

* به روش جزء به جزء می‌دانیم :

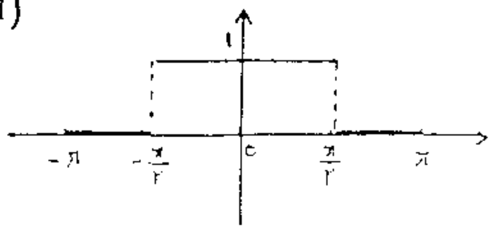
$$I_1=\frac{e^x}{1+(n\pi)^2}(\sin n\pi x-n\pi\cos n\pi x)\Big]_0^1=\frac{n\pi}{1+(n\pi)^2}\left(e^1(-1)^{n+1}+1\right).$$

$$I_2=\frac{e^{-x}}{1+(n\pi)^2}(-\sin n\pi x-n\pi\cos n\pi x)\Big]_0^1=\frac{n\pi}{1+(n\pi)^2}\left(e^{-1}(-1)^{n+1}+1\right).$$

$$I_1-I_2=\frac{n\pi}{1+(n\pi)^2}\left((e^1-e^{-1})(-1)^{n+1}\right)=\frac{2n\pi\sinh 1}{1+(n\pi)^2}(-1)^{n+1} \qquad \sinh 1=\frac{e^1-e^{-1}}{2}$$

$$\Rightarrow f(x)=2\pi\sinh 1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{1+(n\pi)^2}\sin n\pi x$$

d)



$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ 1 & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

$f(x)$ زوج است

پس $b_n = 0$

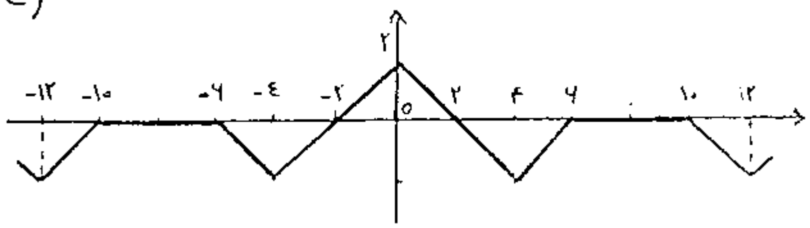
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin nx\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots\right)$$

---

e)



$$f(x)=\begin{cases} 2-x & ; \quad 0 \leqslant x < 4 \\ -6+x & \quad 4 \leqslant x < 6 \\ 0 & \quad 6 \leqslant x < 8 \end{cases}$$

$b_n = 0$: $f(x)$ زوج است پس

$$a_0 = \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\,dx = \frac{2}{8}\int_0^8 f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^4 f(x)\,dx + \frac{1}{4}\int_4^6 f(x)\,dx + \frac{1}{4}\int_6^8 f(x)\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{4}\left(\frac{-2\times 2}{2}\right) + 0 = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{8}\int_0^8 f(x)\cos\frac{n\pi}{8}x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^4 (2-x)\cos\frac{n\pi}{8}x\,dx + \frac{1}{4}\int_4^6 (x-6)\cos\frac{n\pi}{8}x\,dx + 0$$

$$= \frac{1}{4}\left[(2-x)\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{8}x - \left(\frac{8}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi}{8}x\right]_0^4 +$$

$$\frac{1}{4}\left[(x-6)\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{8}x + \left(\frac{8}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi}{8}x\right]_4^6 = \frac{16}{(n\pi)^2}\left[1 - 2\cos\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{3n\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1 - 2\cos\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{3n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi}{8}x$$

f) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ; \quad -1<x<0\\ -x & ; \quad 0<x<1\end{cases}$

$$a_0=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\,dx+\int_{0}^{1}-x\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\cos n\pi x\,dx+\int_{0}^{1}-x\cos n\pi x\,dx=-\Big[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{(n\pi)^2}\cos$$

$$b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\sin n\pi x\,dx+\int_{0}^{1}-x\sin n\pi x\,dx$$

$$a_n=\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2} \qquad b_n=-\frac{1+(-1)^n}{2\pi}+\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^n+1}{2}\sin n\pi x$$

- با بکار بردن سری فوریه $f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ نشان دهید $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots=\frac{\pi}{4}$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}0\,dx=1 \qquad b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

طبق قضیه دیریکله :

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

$$x=\pi \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos\pi-\frac{1}{3}\cos 3\pi+\frac{1}{5}\cos 5\pi-\dots\right)=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=0$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\dots\right)=0 \Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots=\frac{\pi}{4}$$

۴) سری فوریه کسینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را بیابید.

a) $$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 < x < \frac{l}{2} \\ 1 & ; \quad \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^{l} dx = \frac{2}{l} \times \frac{l}{2} = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^{l} \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{2}{l} \left[\frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x \right]_{\frac{l}{2}}^{l} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right) \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi} \times \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{l} x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{l} x + \cdots \right)$$

---

b) $$f(x) = \sin \frac{\pi x}{l} \qquad 0 < x < l$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\cos \frac{\pi x}{l} \right]_0^l = \frac{4}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \, dx = \frac{1}{l} \left(\frac{l}{2\pi} \cos \frac{2\pi x}{l} \right)_0^l = 0$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left[\sin (1+n) \frac{\pi}{l} x + \sin (1-n) \frac{\pi}{l} x \right] dx$$

$$= -\frac{1}{l} \left[\frac{l}{\pi(1+n)} \cos (1+n) \frac{\pi x}{l} + \frac{l}{\pi(1-n)} \cos (1-n) \frac{\pi x}{l} \right]_0^l$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{1+n} + \frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right] = \frac{-2\left[(-1)^n + 1\right]}{\pi (n^2 - 1)}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3 \times 5} \cos \frac{4\pi x}{l} + \cdots \right)$$

c) $f(x) = \sin x \qquad 0 < x < \pi$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi} \qquad\qquad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(1+n)x + \sin(1-n)x\right] dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{1+n} + \frac{(-1)^{n+1}}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\ \frac{2}{1-n^2}\left[(-1)^n + 1\right]$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{1-2^2} + \frac{\cos 4x}{1-4^2} + \cdots\right)$$

---

d) $f(x) = \begin{cases} x \ ; & 0 < x < 1 \\ 2-x \ ; & 1 < x < 2 \end{cases}$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = 1$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^1 x \cos\frac{n\pi}{2}x \, dx + \frac{2}{2}\int_1^2 (2-x)\cos\frac{n\pi}{2}x \, dx$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi} x \sin\frac{n\pi}{2}x + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 +$$

$$\left[2 \times \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x - \frac{2}{n\pi} x \sin\frac{n\pi x}{2} - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\frac{n\pi}{2}x\right]_1^2$$

$$= \Big[\cancel{\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi}{2} - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 + \cancel{\frac{4}{n\pi}\sin n\pi} - \cancel{\frac{4}{n\pi}\sin n\pi} - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos n\pi$$

$$- \cancel{\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}} + \cancel{\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\frac{n\pi}{2}\Big] = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\right.$$

اگر n فرد باشد $a_n=0$ است. همچنین اگر n مضرب ۴ باشد داریم $a_n=0$ در غیر این دو صورت $a_n = -\frac{16}{(n\pi)^2}$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)\cos\frac{n\pi}{2}x$$

n های زوج مقادیر ... ،۶ ،۱۰ ،۱۴ ،۱۸ و ... را اختیار کند

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x \quad \Leftarrow$$

۷) سری فوریه سینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را به دست آورید؟

برای تمام توابع این سؤال $a_n = 0$ است.

a) $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & ; \quad \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} x \sin\frac{n\pi}{L}x\, dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} (L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x\, dx$$

$$= \frac{2}{L}\left[-x\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{L}x\right]_0^{\frac{L}{2}} -$$

$$\frac{2}{L}\left[(L-x)\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_{L/2}^{L}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{L}x$$

---

b) $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases}$

حالت خاص a با $L=2$ می باشد پس داریم:

$$f(x) = \frac{4\times 2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)\frac{\pi x}{2}$$

---

c) $f(x) = \cos 2x \qquad 0 < x < \pi$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+2)x + \sin(n-2)x\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi(n+2)}\cos(n+2)x\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{1}{\pi(n-2)}\cos(n-2)x\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+2}-1}{\pi(n+2)} - \frac{(-1)^{n-2}-1}{\pi(n-2)}$$

$$= \frac{2n\left[1+(-1)^{n+1}\right]}{\pi(n^2-4)}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\times\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2-4}\times n\sin nx = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2-2^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-2^2} + \cdots\right]$$

d) $f(x) = x^2 \quad ; \quad 0 < x < \pi$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \left(-\frac{\pi^2}{n}(-1)^n + \frac{2}{n^3}(-1)^n - \frac{2}{n^3}\right)\frac{2}{\pi} = \left(\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right)\frac{2}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left[(-1)^n - 1\right]\right]\sin nx$$

---

۸ - هرگاه $-\pi < x < \pi \; ; \; f(x) = \cos \mu x$ که در آن μ عددی غیرصحیح است. آنگاه نشان دهید:

الف) $$f(x) = \frac{2\mu}{\pi}\sin \mu\pi \left\{\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1-\mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2-\mu^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-\mu^2} + \cdots\right\}$$

ب) از آنجا استنتاج کنید
$$\cot \mu\pi = \frac{2\mu}{\pi}\left\{\frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu^2-1} + \frac{1}{\mu^2-2^2} + \cdots + \frac{1}{\mu^2-n^2} + \cdots\right\}$$

ج) همچنین نشان دهید که
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

الف) تابع زوج است پس داریم: $b_n = 0$ و
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos \mu x \, dx = \frac{2}{\mu\pi}\sin \mu\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos \mu x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(\mu+n)x + \cos(\mu-n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\mu+n}\sin(\mu+n)x + \frac{1}{\mu-n}\sin(\mu-n)x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\mu+n}\sin(\mu\pi + n\pi) + \frac{1}{\mu-n}\sin(\mu\pi - n\pi)\right]$$

$$= \frac{\sin \mu\pi \cos n\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\mu+n} + \frac{1}{\mu-n}\right] = \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi(n^2-\mu^2)}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1-\mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2-\mu^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-\mu^2} + \cdots\right]$$

ب) اگر $x=\pi$ داریم:

$$\cos\mu\pi=\frac{2\mu}{\pi}\sin\mu\pi\left[\frac{1}{2\mu^2}+\frac{\cos\pi}{1-\mu^2}-\frac{\cos2\pi}{2^2-\mu^2}+\cdots\right]$$

$$=\frac{2\mu}{\pi}\sin\mu\pi\left[\frac{1}{2\mu^2}+\frac{-1}{1-\mu^2}+\frac{-1}{2^2-\mu^2}+\cdots+\frac{-1}{n^2-\mu^2}+\cdots\right]$$

$$\cot\mu\pi=\frac{\cos\mu\pi}{\sin\mu\pi}=\frac{2\mu}{\pi}\left[\frac{1}{2\mu^2}+\frac{1}{\mu^2-1}+\frac{1}{\mu^2-2^2}+\cdots+\frac{1}{\mu^2-n^2}+\cdots\right]$$

ج) $\mu=\frac{1}{3} \Leftarrow$

$$\cot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3\pi}\left[\frac{9}{2}+\frac{9}{1-9}+\frac{9}{1-9\cdot2^2}+\cdots+\frac{9}{1-9n^2}+\cdots\right]$$

$$\frac{\sqrt3}{3}=\frac{18}{3\pi}\left[\frac12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-9n^2}\right]\Rightarrow\frac{\sqrt3\,\pi}{18}=\frac12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-9n^2}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}=\frac12-\frac{\sqrt3\,\pi}{18}$$

۹- ثابت کنید به ازای $-\pi<x<\pi$ الف) $\sin ax=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2-a^2}-\frac{2\sin2x}{2^2-a^2}+\frac{3\sin3x}{3^2-a^2}-\cdots\right)$
که در آن a غیرصحیح است

ب) $x\cos x=-\frac12\sin x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx$

الف) $\sin ax$ فرد است پس $a_0=a_n=0$ و

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx\,dx$$

$$=\frac12\times\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(a-n)x-\cos(a+n)x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a-n)x}{a-n}-\frac{\sin(a+n)x}{a+n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a\pi-n\pi)}{a-n}-\frac{\sin(a\pi+n\pi)}{a+n}\right]=\frac{\sin a\pi\cos n\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a-n}-\frac{1}{a+n}\right]$$

$$=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\times\frac{n(-1)^n}{(a^2-n^2)}$$

$$\Rightarrow\sin ax=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{1-a^2}\sin x-\frac{2\sin2x}{2^2-a^2}+\frac{3\sin3x}{3^2-a^2}-\cdots\right]$$

ب) $x\cos x$ تابعی فرد است پس داریم: $a_n = a_0 = 0$ و

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[x\sin(n+1)x + x\sin(n-1)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x - \frac{x\cos(n-1)x}{n-1} + \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right]$$

$$= \left[\frac{\pi(-1)^n}{n+1} + 0 + \frac{\pi(-1)^n}{n-1} + 0 + 0 - 0 + 0 - 0\right]\frac{1}{\pi} = \frac{2n(-1)^n}{n^2-1} \qquad n \neq 1$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx$$

۱۰- ثابت کنید که (فرمول پارسوال)

$$\int_{-l}^{l}[f(x)]^2 dx = L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right)$$

در این فرمول a_n و b_n ضرایب اویلر سری فوریه تابع $f(x)$ هستند.

برهان: $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx + b_n \sin kx$$

$$k = \frac{n\pi}{l}$$

$$f^2(x) = \frac{a_0^2}{4} + a_0\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos kx + b_n \sin kx + \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx\right]$$
$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx\right]$$

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)\, dx = A + B + C \qquad A = \int_{-l}^{l}\frac{a_0^2}{4}dx = \frac{a_0^2}{2} l$$

$$B = \int_{-l}^{l}\left(a_0\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx + b_n \sin kx\right) dx = \int_{-l}^{l}\left(a_0\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$= a_0\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x\, dx + \int_{-l}^{l} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\, dx\right) = 0 + 0 = 0$$

$$C = \int_{-l}^{l}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx\right] dx$$

$$=\int_{-l}^{l}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx\right)^2 dx + 2\int_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx \; dx + \int_{-l}^{l}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx\right)^2 dx$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 \qquad I_1 = \int_{-l}^{l}\left(a_1\cos\frac{\pi}{l}x + a_2\cos\frac{2\pi}{l}x + \cdots\right)\left(a_1\cos\frac{\pi}{l}x + a_2\cos\frac{2\pi}{l}x + \cdots\right)dx$$

عبارات زیرانتگرال I_1 از ضرب عوامل $a_m \cos\frac{m\pi}{l}x$ و $a_n \cos\frac{n\pi}{l}x$ حاصل می‌شوند که دو حالت (اول و دوم) دارد.

(حالت اول) $m = n \Rightarrow \int_{-l}^{l} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x \cdot a_n \cos\frac{n\pi}{l}x \; dx = a_n^2\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi}{l}x \; dx = a_n^2 \cdot l$

(حالت دوم) $m \neq n \Rightarrow \int_{-l}^{l} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x \cdot a_m \cos\frac{m\pi}{l}x \; dx = a_n a_m \int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x \cdot \cos\frac{m\pi}{l}x = 0$

با توجه به روابط صفحه ۲ کتاب ثابت شد

$$\Rightarrow I_1 = l\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$I_2 = 2\int_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx = 2\int_{-l}^{l}\left(a_1\cos\frac{\pi}{l}x + a_2\cos\frac{2\pi}{l}x + \cdots\right)\left(b_1\sin\frac{\pi}{l}x + \cdots\right)dx$$

$$= 2\int_{-l}^{l}\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi}{l}x \cdot b_n \sin\frac{n\pi}{l}x = 2\sum_{m,n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} a_m b_n \cos\frac{m\pi}{l}x \sin\frac{n\pi}{l}x \, dx = 2\times 0 = 0$$

$$I_3 = \int_{-l}^{l}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx\right)^2 dx = \int_{-l}^{l}\left(b_1\sin\frac{\pi}{l}x + b_2\sin\frac{2\pi}{l}x + \cdots\right)\left(b_1\sin\frac{\pi}{l}x + b_2\sin\frac{2\pi}{l}x + \cdots\right)dx$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} b_n^2 \sin^2\frac{n\pi}{l}x \, dx}_{n=m} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n b_m \sin\frac{n\pi}{l}x \sin\frac{m\pi}{l}x \; dx = \sum_{n=1}^{\infty} l\, b_n^2 + 0$$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = A + B + C = \frac{a_0^2}{2}l + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} l\left(a_n^2 + b_n^2\right) = l\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right)$$

ثابت کنید که الف)

$$\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1} \frac{\cos nx}{n} \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

در بسط ln از ریاضیات عمومی ۱ داریم:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

$$z = -e^{ix} \longrightarrow \ln(1-e^{ix}) = -e^{ix} - \frac{(-e^{ix})^2}{2} + \frac{(-e^{ix})^3}{3} - \cdots$$

$$\ln(1-e^{ix}) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}(\cos nx + i\sin nx)$$

$$2\sin\frac{x}{2} = 2\left(\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}\right) = i e^{-\frac{ix}{2}}(1-e^{ix})$$

$$\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = \ln\left(i e^{-\frac{ix}{2}}(1-e^{ix})\right)$$

$$\mathrm{Re}\left[\ln i e^{-\frac{ix}{2}}(1-e^{ix})\right] = \mathrm{Re}\left(\ln i e^{-\frac{ix}{2}} + \ln(1-e^{ix})\right) = \ln(1-e^{ix})$$

$$\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \qquad 0 < x < \pi$$

ب)

$$\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n} \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

اگر در بسط ln بالا به جای z قرار دهیم e^{ix} خواهیم داشت:

$$\ln(1+e^{ix}) = e^{ix} - \frac{(e^{ix})^2}{2} + \frac{(e^{ix})^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{(ix)n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\cos nx + i\sin nx)$$

$$2\cos\frac{x}{2} = 2\left(\frac{e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}}{2}\right) = (e^{ix}+1)e^{-\frac{ix}{2}}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\ln\left(e^{\frac{ix}{2}}(1+e^{ix})\right)\right\} = \frac{ix}{2} + \ln(1+e^{ix}) = \ln(1+e^{ix})$$

۱۴) انتگرال فوریه هریک از توابع را بیابید:

a) $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < a \\ 0 & ; \quad x > a \end{cases} \qquad f(-x) = f(x)$

تابع زوج است بنابراین داریم: $B(w) = 0$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^a x \cos wx \, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{w}\sin wx + \frac{1}{w^2}\cos wx\right)_0^a$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{w}\sin aw + \frac{1}{w^2}\cos aw - \frac{1}{w^2}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{a \sin aw}{w} + \frac{\cos aw - 1}{w^2}\right]\cos wx \, dw$$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} + e^{-2x} & x > 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$

تابع زوج است $B(w) = 0$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\cos wx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos wx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-2x}\cos wx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-x}}{1+w^2}\left(-\cos wx + w\sin wx\right) + \frac{e^{-2x}}{4+w^2}\left(-2\cos wx + w\sin wx\right)\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(0+0) - \left(\frac{1}{1+w^2}\times(-1) + \frac{1}{4+w^2}\times(-2)\right)\right] = \frac{3}{\pi}\times\frac{2+w^2}{4+5w^2+w^4}$$

$$f(x) = \frac{3}{\pi}\int_0^\infty \frac{2+w^2}{4+5w^2+w^4}\cos wx \, dx$$

---

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 < x < a \\ 0 & ; \quad x > a \end{cases} \quad , \quad f(x) = f(-x)$

تابع زوج است $B(w) = 0$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^a x^2 \cos wx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{w}\sin wx + \frac{2x\cos wx}{w^2} - \frac{2}{w^3}\sin wx\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{a^2}{w}\sin aw + \frac{2a}{w^2} - \frac{2}{w^3}\sin aw - 0\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(a^2 - \frac{2}{w^2}\right)\sin aw + \frac{2a}{w}\cos aw\right]\frac{\cos wx}{w} \, dw$$

...ادامه هرگاه $f(-x)=f(x)$ آنگاه ثابت کنید:

a) $f(bx)=\frac{1}{b}\int_0^\infty a\left(\frac{w}{b}\right)\cos wx\,dw \;;\; b>0$

$$f(u)=\int_0^\infty a(w)\cos wu\,dw \quad , \quad a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(u)\cos wu\,du = a(w)$$

$$f(u)=\int_0^\infty a(w)\cos wu\,dw \xRightarrow{u=bx} f(bx)=\int_0^\infty a(w)\cos wbx\,dw$$

$$wb=w' \Rightarrow b\,dw=dw'$$

$$\Rightarrow f(bx)=\int_0^\infty a\left(\frac{w'}{b}\right)\cos w'x\,\frac{dw'}{b}=\frac{1}{b}\int_0^\infty a\left(\frac{w'}{b}\right)\cos w'x\,dw'$$

---

b) $x^2 f(x)=\int_0^\infty a^*(w)\cos wx\,dw \quad , \quad a^*=-\frac{d^2a}{dw^2}$

$$\int_0^\infty a^*(w)\cos wx\,dw=\int_0^\infty -\frac{d^2}{dw^2}a(w)\cos wx\,dw=-\int_0^\infty a''(w)\cos wx\,dw$$

با استفاده از جزء به جزء داریم: $\int_0^\infty a''(w)\cos wx\,dw = a'(w)\cos wx\Big]_0^\infty-\int_0^\infty(-x\sin wx)\,a'(w)\,dw$

$$* \Rightarrow \int_0^\infty a^*(w)\cos wx\,dw=-\left[\Big[a'(w)\cos wx\Big]_0^\infty + a(w)\,x\sin wx\Big]_0^\infty-\int_0^\infty x^2 a(w)\cos wx\,dw\right]$$

$$=\Big[-a'(w)\cos wx\Big]_0^\infty-\Big[a(w)\,x\sin wx\Big]_0^\infty+x^2\int_0^\infty a(w)\cos wx\,dw=I_1+I_2+x^2 \ldots$$

...باید نشان دهیم I_1 و I_2 هر دو صفرند

$$I_1=\Big[-a'(w)\cos wx\Big]_0^\infty=0 \quad , \quad I_2=0$$

...راه حل دوم مورد b

$$a^*(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x^2 f(x)\cos wx\,dx \qquad *$$

$$a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx \xRightarrow[\text{نسبت به } w]{\text{مشتق}} a'(w)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\sin wx\,dx \xRightarrow[\text{نسبت به } w]{\text{مشتق گیری}}$$

$$a''(w)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x^2 f(x)\cos wx\,dx \xRightarrow{*} a''(w)=-a^*(w) \Rightarrow a^*(w)=-\frac{d^2a}{dw^2}$$

۱۴- ثابت کنید که: $f(x) = -f(-x)\ ;\ x<0$, $x>0$; a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{w^3 \sin wx}{w^4+4}\, dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x$

if $f(-x) = -f(x) \Rightarrow a(w) = 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} b(w) \sin wx\, dw$

فرض: $b(w) = \dfrac{w^3}{w^4+4}$, $\displaystyle\int_0^{\infty} b(w) \sin wx\, dw = f(x) \Rightarrow b(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x) \sin wx\, dx$

$$b(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x \cdot \sin wx\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \cdot \sin wx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x}\left(\sin(w+1)x + \sin(w-1)x\right)$$

$$\Rightarrow 2b(w) = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(w+1)x\, dx + \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(w-1)x\, dx$$

با توجه به رابطه‌ی * در پشت سؤال ۴ داریم:

$$2b(w) = \frac{e^{-x}}{1+(w+1)^2}\left(-\sin(w+1)x - (w+1)\cos(w+1)x\right)\Big]_0^{\infty} + \frac{e^{-x}}{1+(w-1)^2}\left[-\sin(w-1)x - (w-1)\cos(w-1)x\right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow 2b(w) = \frac{w+1}{1+(w+1)^2} + \frac{w-1}{1+(w-1)^2} = \frac{2w^3}{w^4+4} \Rightarrow b(w) = \frac{w^3}{w^4+4}$$

---

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(w\frac{\pi}{2}) \cos wx}{1-w^2}\, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & ; |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

if $f(-x) = f(x) \Rightarrow b(w) = 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} a(w) \cos wx\, dw$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} w)}{1-w^2} \cos wx\, dw = \int_0^{\infty} a(w) \cos wx\, dw = f(x) \Rightarrow a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x) \cos wx\, dx$$

$a(w) = \dfrac{\cos \frac{\pi}{2} w}{1-w^2}$ هدف از برهان این است که اگر $f(x)$ سمت راست b باشد آنگاه $a(w)$:

$$a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x) \cos wx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos x \cos wx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(w+1)x + \cos(w-1)x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2(w+1)} \sin(w+1)x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2(w-1)} \sin(w-1)x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(w+1)\frac{\pi}{2}}{2(w+1)} + \frac{\sin(w-1)\frac{\pi}{2}}{2(w-1)}$$

$$= \frac{-2\cos w\frac{\pi}{2}}{2(w^2-1)} = \frac{\cos w\frac{\pi}{2}}{1-w^2}$$

c) $$\int_0^\infty \frac{\sin w \cos wx}{w}\,dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$f(-x) = f(x) \qquad -\infty < x < 0$

چون f زوج است $\Leftarrow b(w) = 0$

$$a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\pi}{2}\cos wx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty 0 \cos wx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi \cos wx\,dx = \frac{\sin w}{w}$$

$$\text{if } x=1 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin w \cos w}{w}\,dw = \int_0^\infty \frac{\sin 2w}{2w}\,dw = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

۱۷- سری فوریه مختلط هریک از توابع زیر را بیابید. به کمک آن سری فوریه حقیقی متناظر با آنها را معین کنید.

a) $f(x) = e^{2x} \quad -\pi < x < \pi \quad ; \quad$ جواب: $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{2+in}{4+n^2}(-1)^n \sinh 2\pi\, e^{inx}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(2-in)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{2-in}\left(e^{(2-in)\pi} - e^{-(2-in)\pi}\right)$$

$$e^{in\pi} = (-1)^n = \cos n\pi + \cancel{i\sin n\pi}_{0} \Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{2-in}\times\frac{2+in}{2+in}\left(e^{2\pi}e^{-in\pi} - e^{-2\pi}e^{+in\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\times\frac{2+in}{4+n^2}\times 2\times(-1)^n \sinh 2\pi$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{2+in}{4+n^2}(-1)^n \sinh 2\pi\, e^{inx}$$

$a_n = c_n + c_{-n}$

$b_n = i(c_n - c_{-n})$

---

b) $f(x) = x \quad ; \quad -\pi < x < \pi \quad \rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,e^{-inx}\,dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{x}{in} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{\pi}{in} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-in\pi} - \left(\frac{\pi}{in} + \frac{1}{n^2}\right)e^{in\pi}\right]$$

$$= -\frac{\pi}{in}\left(e^{in\pi} + e^{-in\pi}\right) - \frac{1}{n^2}\underbrace{\left(e^{in\pi} - e^{-in\pi}\right)}_{0} = \frac{i}{n}(-1)^n$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{i}{n} e^{inx}$$

۱۸-

a) $f(x)=\begin{cases} e^{-2x} & ; \quad -\pi<x<\pi \\ 0 & ; \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

$$c(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x}e^{-iwx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-e^{-(2x+iwx)}}{(2+iw)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(2+iw)\pi}-e^{-(2+iw)\pi}}{2+iw}\right]=\frac{2-iw}{\pi(4+w^2)}\left[\frac{e^{(2+iw)\pi}-e^{-(2+iw)\pi}}{2}\right]$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2-iw}{\pi(4+w^2)}\left[\frac{e^{(2+iw)\pi}-e^{-(2+iw)\pi}}{2}\right]e^{iwx}\,dw$$

---

b) $f(x)=\begin{cases} \sinh 2x & ; \quad 0<x<2 \\ 0 & ; \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

$$c(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^2 \sinh 2x\, e^{-iwx}\,dx=\frac{1}{4\pi}\int_0^2 e^{2x}e^{-iwx}\,dx-\frac{1}{4\pi}\int_0^2 e^{-2x}e^{-iwx}\,dx$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(2-iw)x}}{(2-iw)}+\frac{e^{-(2+iw)x}}{(2+iw)}\right]_0^2=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{4-2iw}}{2-iw}+\frac{e^{-4-2iw}}{2+iw}-\frac{1}{2-iw}-\frac{1}{2+iw}\right]$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}c(w)\,e^{iwx}\,dw$$

۱- آیا تبدیلات کسینوسی و سینوسی سری فوریه تابع $f(x)=e^{x}$ موجود است.

خیر، زیرا e^{x} به طور مطلق انتگرال پذیر نیست $\left|\int_{0}^{\infty} e^{x}\,dx\right| > \infty$

۲- $F_s\{e^{-ax}\}\ ;\ a>0$ را با انتگرال گیری به دست آورید:

$$F_s\{e^{-ax}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin wx\,dx$$

حاصل انتگرال $\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin wx\,dx$ به روش جزء به جزء قابل محاسبه است. بدین ترتیب که

$$I_0=\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin wx\,dx = uv-\int_{0}^{\infty} v\,du = -\frac{e^{-ax}\cos wx}{w} - \underbrace{\int_{0}^{\infty}\frac{a}{w}e^{-ax}\cos wx\,dx}_{I}$$

$$u=e^{-ax} \Rightarrow du=-a e^{-ax}dx$$

$$dv=\sin wx\,dx \Rightarrow v=-\frac{\cos wx}{w}$$

برای I بازهم به روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$$I=\frac{a}{w}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos wx\,dx = uv-\int_{0}^{\infty} v\,du = \frac{a}{w^2}e^{-ax}\sin wx+\frac{a^2}{w^2}\underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin wx\,dx}_{I_0}$$

$$u=e^{-ax} \Rightarrow du=-a e^{-ax}dx$$

$$dv=\cos wx\,dx \Rightarrow v=\frac{\sin wx}{w}$$

$$\Rightarrow I_0=-\frac{1}{w}e^{-ax}\cos wx-\frac{a}{w^2}e^{-ax}\sin wx-\frac{a^2}{w^2}\underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin wx\,dx}_{I_0}$$

$$\Rightarrow I_0=\left[-\frac{1}{w}\left(e^{-ax}\cos wx+\frac{a}{w}e^{-ax}\sin wx\right)\frac{w^2}{a^2+w^2}\right]_{0}^{\infty}$$

$$\Rightarrow I_0=-\frac{w}{a^2+w^2}$$

$$\Rightarrow F_s\{e^{-ax}\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{-w}{a^2+w^2}$$

۲۲- تبدیل کسینوسی وارون تابع e^{-w} را بیابید.

$$F_c^{-1}\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-w}\cos wx \, dw$$

در اینجا $a=-1$ و $x=b$

$$\int e^{ax}\cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$$

$$F_c^{-1}\{f(w)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{e^{-w}}{1+x^2}(-\cos wx + x\sin wx)\Big]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(0 - \frac{e^0}{1+x^2}(-1)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+x^2}$$

۲۳- تبدیل سینوسی وارون $\hat{f}(w)$ را بیابید.

$$F_s^{-1}\{\hat{f}(w)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}(w)\sin wx \, dx$$

$$F_s^{-1}\{\hat{f}(w)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left(\frac{1}{w} - \frac{\cos w\pi}{w}\right)\sin wx \, dw$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin wx}{w}dw - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin wx \cos w\pi}{w}dw$$

از آنجا که $\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}dw = \frac{\pi}{2}$ پس انتگرال دوم قابل حل است.

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{x\sin wx}{wx}dw - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{2w}\left(\sin(x+\pi)w + \sin(x-\pi)w\right)dw$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x\frac{\sin wx}{wx}dw - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{2}\int_0^\infty (x+\pi)\frac{\sin(x+\pi)w}{(x+\pi)w} + \frac{\sin(x-\pi)w}{(x-\pi)(w)}(x-\pi) \, dw$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[x \times \frac{\pi}{2} - \frac{(x+\pi)}{2}\times\frac{\pi}{2} - \frac{(x-\pi)}{2}\times\frac{\pi}{2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(x-\pi)$$

$$\Rightarrow F^{-1}\{\hat{f}(w)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(x-\pi)$$

۲ـ آیا تبدیل کسینوسی فوریه تابع $\frac{\cos x}{x}$ یا $\frac{\sin x}{x}$ موجود است؟

الف: $F_c\left\{\frac{\cos x}{x}\right\}$ موجود نیست زیرا $\frac{\cos x}{x}$ به طور مطلق انتگرال پذیر نیست، چون در همسایگی راست صفر مانند $\frac{1}{x}$ عمل می‌کند و $\int_0^a \frac{1}{x}\,dx \quad a>0$ واگراست.

ب: $F_c\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}$ موجود است، زیرا $\frac{\sin x}{x}$ مطلقاً انتگرال پذیر و هموار است.

$$F_c\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin x\,.\,\cos wx}{x}\,dx$$

که انتگرال مقابل در سؤال ۲۸ محاسبه خواهد شد.

۲۵ـ تبدیل فوریه هریک از توابع زیر را بدون استفاده از جدول تبدیلات فوریه به دست آورید.

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x<0 \end{cases}$$

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\,e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(iw+1)x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)}e^{-(1+iw)x}\Big]$$

$$\left[= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\,(1+iw)}(0-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+iw)} \right]$$

$$b)\quad f(x) = \begin{cases} e^{x} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x<0 \end{cases}$$

$$F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{x}.e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(1-iw)}\,e^{(1-iw)x}\Big]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-(iw-1)x}}{1-iw}\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(1-iw)}(0-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(iw-1)}$$

c) $f(x)=\begin{cases} e^{2ix} & ; \quad |x|<1 \\ 0 & ; \quad |x|\geq 1 \end{cases}$

$$F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(0 + \int_{-1}^{1} e^{2ix}\, e^{-i\omega x}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{i(2-\omega)x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{i(2-\omega)}\, e^{i(2-\omega)x}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\; i(2-\omega)}\left(e^{i(2-\omega)} - e^{-i(2-\omega)}\right)$$

$$= \frac{2\sin(2-\omega)}{\sqrt{2\pi}\;(2-\omega)}$$

* توجه: $\left[\left(e^{i(2-\omega)} - e^{-i(2-\omega)}\right) = 2i\sin(2-\omega)\right]$

---

d) $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad 0<x<a \\ 0 & ; \quad \text{بازه‌های دیگر} \end{cases}$

$$F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a} x\, e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{x}{i\omega} - \frac{1}{(i\omega)^2}\right] e^{-i\omega x}\Big]_{0}^{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left[-\frac{a}{i\omega} - \frac{1}{(i\omega)^2}\right]e^{-i\omega a} + \frac{1}{(i\omega)^2}\right]$$

۲۴- نشان دهید اگر f(x) دارای تبدیل فوریه باشد f(x-a) نیز دارای تبدیل فوریه است و $F\{f(x-a)\} = e^{-i\omega a}\, F\{f(x)\}$

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \quad \text{و} \quad F\{f(x-a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\, e^{-i\omega(x-a)}\, d(x-a)$$

$u = x-a \qquad x = u+a \qquad dx = du$

$$F\{f(u)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\omega u}\, e^{-i\omega a}\, du = \frac{e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\omega u}\, du$$

$u \to x$

$$\Rightarrow F\{f(x-a)\} = \frac{e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = e^{-i\omega a}\, F\{f(x)\}$$

۲۷- نشان دهید که اگر $\hat{f}(w)$ تبدیل فوریه f باشد آنگاه $\hat{f}(w-a)$ تبدیل فوریه $e^{iax}f(x)$ است.

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iwx}\,dx \quad , \quad \hat{f}(w-a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i(w-a)x}\,dx$$

$$\Rightarrow \hat{f}(w-a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x).e^{-iwx}e^{iax}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x)e^{iax}\right)e^{-iwx}\,dx=F\left\{f(x)e^{iax}\right\}$$

۲۸- انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ; |x|<1\\ 0 & ; |x|>1\end{cases}$ را بیابید و به کمک آن انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{\sin x.\cos ax}{x}\,dx$ را به ازای مقادیر گوناگون a بیابید.

$$f(-x)=f(x) \Longrightarrow b(w)=0$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(w)\cos wx\,dw \quad , \quad a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos wx\,dx$$

$$a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\cos wx\,dx+0=\frac{2}{\pi w}\sin wx\Big]_0^1=\frac{2}{\pi w}\sin w$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}\cos wx\,dx \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin w\cos wx}{w}\,dx=\frac{\pi}{2}f(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin x.\cos ax}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}f(a)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & ; |a|<1\\ 0 & ; |a|>1\end{cases}$$

$$\text{if } |a|=1 \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1)\ a=1 \quad \int_0^{\infty}\frac{\sin x.\cos x}{x}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\,dx=\frac{\pi}{4} \\ 2)\ a=-1 \quad \int_0^{\infty}\frac{\sin x.\cos(-x)}{x}\,dx=\frac{\pi}{4}\end{array}$$

۲۹- به کمک انتگرال فوریه نشان دهید

a) $\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a} \qquad a>0$

$\int_0^\infty \frac{w\sin xw}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-x} \qquad x>0 \qquad \int_0^\infty b(w)\sin wx\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-x}$

$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}\sin wx\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{e^{iwx}-e^{-iwx}}{2i}\right)dx$

$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{-x(1-iw)} - e^{-x(1+iw)}\right)dx = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{iw-1}\,e^{-x(1-iw)}\Big]_0^\infty + \frac{1}{2i}\times\frac{1}{1+iw}\,e^{-x(1+iw)}\Big]_0^\infty$

$= \frac{1}{2i}\,\frac{1}{iw-1} - \frac{1}{2i}\,\frac{1}{iw+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{-1}{iw-1}+\frac{-1}{iw+1}\right) = \frac{-2iw}{2i(i^2w^2-1)} = \frac{w}{1+w^2} = b(w)$

b) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a} \qquad a\geq 0$

$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-x}$

$a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos wx\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,\frac{\left(e^{iwx}+e^{-iwx}\right)}{2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-x(1-iw)} + e^{-x(1+iw)}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{iw-1}\,e^{-x(1-iw)} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{-x(1+iw)}}{(1+iw)}\,e^{-x(1+iw)}\Big]_0^\infty$

$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-iw} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+iw} = \frac{2}{2}\,\frac{1}{1+w^2} = \frac{1}{1+w^2}$

۲ـ تبدیلات فوریه مختلط از توابع زیر را بیابید:

a) $F(x) = \begin{cases} 1 & ; \ |x| < \pi \\ 0 & \ |x| > \pi \end{cases}$

$$F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i\omega\pi} - e^{-i\omega\pi}}{i\omega} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \frac{2\sin\omega\pi}{\omega} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \ \frac{\sin\omega\pi}{\omega}$$

---

b) $F(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ |x| < x_0 \\ 0 & ; \ |x| > x_0 \end{cases}$

$$F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_0}^{x_0} x^2 e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-x^2 e^{-i\omega x}}{i\omega} + \frac{2x e^{-i\omega x}}{\omega^2} + \frac{2e^{-i\omega x}}{i\omega^3} \right]_{-x_0}^{x_0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-x_0^2 e^{-i\omega x_0}}{i\omega} + \frac{2x_0 e^{-i\omega x_0}}{\omega^2} + \frac{2e^{-i\omega x_0}}{i\omega^3} + \frac{x_0^2 e^{i\omega x_0}}{i\omega} + \frac{2x_0 e^{i\omega x_0}}{\omega^2} - \frac{2e^{i\omega x_0}}{i\omega^3} \right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2}{\omega}\left[x_0^2 - \frac{2}{\omega^2}\right] \sin\omega x_0 + \frac{4x_0}{\omega^2} \cos\omega x_0 \right]$$

۳۱ـ تبدیل فوریه تابع $F(x) = \begin{cases} 1-x^2 & ; \ |x|<1 \\ 0 & ; \ |x|>1 \end{cases}$ را بدست آورید و به کمک آن $\int_0^{\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\, dx$ را محاسبه کنید.

$$\sqrt{2\pi}\ F\{f\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2) e^{-i\omega x}\, dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi}\ F\{f\} = \left[\left(-\frac{1}{i\omega}(1-x^2) + \frac{2x}{(i\omega)^2} + \frac{2}{(i\omega)^3} \right) e^{-i\omega x} \right]_{-1}^{1}$$

(ادامه در صفحه بعد)

ادامه سوال ۳۱.

$$= \left(\frac{2}{(iw)^2} + \frac{2}{(iw)^3}\right)e^{-iw} - \left(\frac{2}{(iw)^3} - \frac{2}{(iw)^2}\right)e^{iw}$$

$$= \frac{2}{(iw)^2}\left(e^{-iw} + e^{iw}\right) - \frac{2}{(iw)^3}\left(e^{+iw} - e^{-iw}\right) = \frac{1}{(iw)^2}\cos w - \frac{1}{(iw)^3}\, i\sin w = -\frac{\cos w}{w^2} + \frac{1}{w^3}\sin w$$

$$\Rightarrow \hat{F}(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{w\cos w - \sin w}{w^3}$$

$$, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(w)e^{iwx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w\cos w - \sin w}{w^3}\, e^{iwx}\,dw$$

$$\Rightarrow f(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w\cos w - \sin w}{w^3}\,dw = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w\cos w - \sin w}{w^3}\,dw = -2\pi$$

$$g(w) = \frac{w\cos w - \sin w}{w^3} \quad , \quad g(-w) = \frac{-w\cos(-w) - \sin(-w)}{(-w)^3} = g(w)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(w)\,dw = -2\pi \Rightarrow \int_0^{\infty} g(w)\,dw = \frac{1}{2}(-2\pi) = -\pi$$

۳۲- تبدیلات فوریه کسینوسی و سینوسی هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \leq x < 1 \\ 0 & ; \ x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_c\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 1 \times \cos wx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{w}\sin wx\Big]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin w}{w}$$

$$F_s\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \sin wx\,dx = -\frac{1}{w}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos wx\Big]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1 - \cos w}{w}$$

$$b)\ f(x) = e^{-ax}\ (a>0) \qquad F_c\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos wx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{e^{-ax}}{a^2+w^2}\left(-a\cos wx + w\sin wx\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow F_c\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{a}{a^2+w^2}$$

$$F_s\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin wx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{e^{-ax}}{a^2+w^2}\left(-a\sin wx - w\cos wx\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow F_s\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(0 - \frac{1}{a^2+w^2}(-w)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{w}{a^2+w^2}\right)$$

۳۳- تبدیل فوریه سینوسی تابع $e^{-|x|}$ را بدست آورید و به کمک آن $\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{1+x^2}dx$ را محاسبه کنید.

$$F_s\{f(x)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-|x|}\sin wx\,dx \qquad 0\leqslant x\leqslant\infty \Rightarrow |x|=x \Rightarrow F_s\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\sin wx\,dx$$

$$2i\sin wx=e^{iwx}-e^{-iwx} \Rightarrow e^{-x}\sin wx=\frac{1}{2i}\left(e^{(iw-1)x}-e^{-(iw+1)x}\right)$$

$$F_s\{f\}=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{-1}{(1-iw)}e^{-(1-iw)x}+\frac{1}{(iw+1)}e^{-(iw+1)x}\right]_0^\infty=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[0-\left(\frac{-1}{1-iw}+\frac{1}{iw+1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow F_s\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{w}{1+w^2}$$

$$F_s^{-1}\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}(w)\sin wx\,dw=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{w}{1+w^2}\sin wx\,dw=e^{-|x|}$$

اگر $x=m \Rightarrow \int_0^\infty \frac{w\sin mw}{1+w^2}dw=\frac{\pi}{2}e^{-|m|}$ و (با تغییر متغیر از w به x نتیجه حاصل می‌شود)

۳۴- چنان‌چه $f(x)$ تابعی پیوسته تکه‌ای باشد در فاصله $[-\pi,\pi]$ و متناوب با دوره تناوب 2π نیز باشد، آنگاه ثابت کنید توابع زیر نیز دارای چنین خاصیتی هستند.

$$g(x)=f(w+x)\,\frac{\sin\{(n+\frac{1}{2})(w+x)\}}{2\sin\frac{w}{2}}\quad, n=1,2,3,\dots$$

برهان: $\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{2i\sin(n+\frac{1}{2})x}{2i\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{e^{i(n+\frac{1}{2})x}-e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}=$

$$\frac{e^{-i\frac{x}{2}}\left(e^{i(n+1)x}-e^{-inx}\right)}{e^{-i\frac{x}{2}}\left(e^{ix}-1\right)}=\frac{e^{i(n+1)x}-e^{-inx}}{e^{ix}-1}=\frac{\sum_{k=-n}^{n}e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{e^{ix}-1}$$

$$=\frac{\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}\left(e^{ix}-1\right)}{e^{ix}-1}=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}=D_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}+e^{-ikx}=1+\sum_{k=1}^{n}2\cos$$

$D_n(x)$ تابعی پیوسته و متناوب است.

$$\Rightarrow D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

$$g(x) = f(x+w)\, D_n(x+w)\, \frac{\sin \frac{1}{2}(w+x)}{2 \sin \frac{w}{2}}$$

* در این برهان ابتدا نشان دهیم: ۱) و پیوسته [illegible] است. ۲) متناوب است.

$$1)\ g(x) = f(x+w)\, D_n(w+x)\, \frac{\sin \frac{1}{2}(w+x)}{2 \sin \frac{w}{2}} \quad , \quad g(x-w) = f(x) \cdot D_n(x)\, \frac{\sin x/2}{2 \sin \frac{w}{2}}$$

$$\lim g(x) - g(x-w) = \lim\ f(x+w)\, D_n(x+w)\, \frac{\sin \frac{1}{2}(w+x)}{2 \sin \frac{w}{2}} - f(x)\, D_n(x)\, \frac{\sin x/2}{2 \sin w/2}$$

$$= \lim_{w \to 0^-} \Big[f(x+w)\, D_n(x+w)\, \frac{\sin \frac{1}{2}(w+x)}{2 \sin w/2} - f(x)\, D_n(x)\, \frac{\sin \frac{1}{2}(w+x)}{2 \sin w/2} + f(x) D_n(x)\, \frac{\sin \frac{1}{2}(w+x)}{2 \sin \frac{w}{2}}$$

$$- D_n(x)\, f(x)\, \frac{\sin x/2}{2 \sin w/2} \Big]$$

$$= \lim_{w \to 0^-} \big(f(x+w) D_n(x+w) - f(x) D_n(x) \big) \frac{\sin \frac{1}{2}(w+x)}{2 \sin w/2} + \lim_{w \to 0^-} f(x) D_n(x)\, \frac{\sin \frac{w+x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin x/2}$$

$$= \underbrace{\lim_{w \to 0^-} \frac{f(x+w) D_n(x+w) - f(x) D_n(x)}{w} \cdot \frac{w}{2 \sin w/2} \cdot \sin \frac{1}{2}(w+x) \ldots f(x)\, D_n(x) \lim \ldots \frac{\sin \frac{w}{2} \cos(\frac{w}{2} \ldots)}{2 \sin \frac{w}{2}}}_{1}$$

f پیوسته [illegible] است پس [illegible] چ نقطه از [illegible] با پیوستگی از [illegible] پیوستگی ثابت ندارد [illegible] $\lim_{w \to 0^-} \frac{f(x+w) - f(x)}{w}$ یا

$\frac{f(x+\ldots) - \ldots(x)}{\ldots}$ [illegible] وجود دارند [illegible] در ① و ① [illegible] وجود دارد [illegible] حد و از چپ متناهی است

$\to 0^+$

[illegible] ترتیب [illegible] و [illegible] پس g پیوسته [illegible] است [illegible] مستقیم [illegible] سؤال [illegible] هر [illegible] (در [illegible] نشد.)

اثبات

۲) [illegible] g [illegible] حاصل [illegible] تابع متناوب [illegible] $\frac{\sin \frac{w+x}{2}}{\sin \frac{w}{2}}$ است پس و متناوب

است (اما [illegible] و [illegible])

تابع f در فضای در نقطه x_0 در شرط لیپ شیتز از مرتبه α صدق می‌کند هرگاه اعداد مثبت M و δ موجود باشند

به طوری که $|f(x)-f(x_0)| \leqslant M|x-x_0|^{\alpha}$ مشروط بر اینکه $|x-x_0|<\delta$. ثابت کنید اگر f پیوسته بوده و در

شرط لیپ شیتز در x_0 صدق کند آنگاه سری فوریه f به سمت $f(x_0)$ همگراست.

برهان: $x-x_0=t \Rightarrow x=t+x_0$

$$|t|<\delta \Rightarrow |f(x_0+t)-f(x_0)| \leqslant M|t|^{\alpha} \quad \text{if } \alpha=1 \Rightarrow |f(x+t)-f(x_0)| \leqslant M|t|$$

$$\text{مجموع جزئی سری فوریه } f = S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx}, \quad C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt\right) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{ik(x-t)}\, dt$$

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

* با توجه به تعریف ارائه شده در سؤال ۳۴ داریم:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x-t \Rightarrow t = x-u \\ du = -dt \end{array}\right\} \Rightarrow S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u) D_n(u)(-du) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(x-u) D_n(u)$$

با توجه به تمرین ۳۴ ص ۵۹

$$\int_a^{a+2p} f(x)\,dx = \int_{-p}^{p} f(x)\,dx \Rightarrow S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt$$

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x-t) - f(x)\right) D_n(t)\, dt$$

$$, D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

با توجه به سؤال ۳۴

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)-f(t)}{2\sin t/2} \sin(n+\tfrac{1}{2})t\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)-f(t)}{2\sin t/2}\left(\sin nt \cos t/2 + \cos nt \sin t/2\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)-f(x)}{2\tan\frac{t}{2}} \sin nt\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x-t)-f(x)\right)\cos nt\, dt = I_1 + I_2$$

ادامه ۲۸-

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x-t)-f(x)}{2\tan t/2}\sin nt\right|dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \leqslant$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M|\sin nt|\,dt \leqslant \frac{Mn}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\sin nt\,dt$$

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|\,|\cos nt|\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}M|t|\,|\cos nt|\,dt = \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t\cos nt|\,dt$$

$$= \frac{M}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-t|\cos nt|\,dt+\int_{0}^{\pi}t|\cos nt|\,dt\right]$$

$$|I_2| \leqslant \frac{M}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi}t|\cos nt|\,dt-\int_{-\pi}^{0}t|\cos nt|\,dt\right] = \frac{M}{2\pi}\left[2n\int_{0}^{\frac{\pi}{2n}}t\cos nt\,dt-2n\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{0}t\cos nt\,dt\right]$$

$$= \frac{Mn}{\pi}\left[\left[\left(\frac{t}{n}\sin nt+\frac{1}{n^2}\cos nt\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2n}}-\left[\left(\frac{t}{n}\sin nt+\frac{1}{n^2}\cos nt\right)\right]_{-\frac{\pi}{2n}}^{0}\right]$$

$$= \frac{Mn}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n^2}+\frac{\pi}{2n^2}\right) = \frac{M}{n}$$

$$|I_1+I_2| \leqslant |I_1|+|I_2| = \frac{M}{n}+\frac{M}{n}\int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin nt}{n}\,dt = P(n) \quad \text{in } f\to\infty \Rightarrow P(n)\to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|S_n(x)-f(x)| = 0 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n(x) = f(x)$$

* تمرینات فصل دوم (معادلات با مشتقات جزئی)

تمرین ۲.۵ صفحه ۹۱ — مسئله ارتعاش را در حالتی حل کنید که انحراف در روی مرز ناحیه صفر و سرعت اولیه و انحراف اولیه آن به صورت داده شده باشند.

a. $u(x,0) = x(1-x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$

$u_t(x,0) = 0$

در این سؤال $l=1$, $\lambda_n = cn\pi \Leftarrow$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x \, dx$$

$$a_n = 2\left[(x-x^2)\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right) - (1-2x)\left(\frac{-\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\right) + (-2)\,\frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^3}\right]_0^1$$

$$a_n = \frac{4}{(n\pi)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right] \qquad u_t(x,0)=0 \Longrightarrow b_n = 0$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]\cos cn\pi t \, \sin n\pi x$$

b. $u(x,0) = 3\sin x \quad , \quad u_t(x,0) = 0 \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

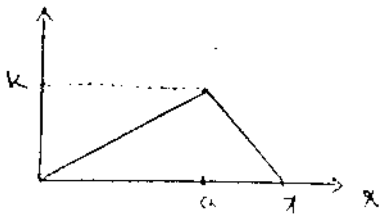
با توجه به $u(x,0)$ نتیجه می‌گیریم سری فوریه این تابع که برابر با a_n خواهد بود فقط شامل جمله اول سری با ضریب $a_1 = 3$ می‌باشد پس سایر جملات ضریب صفر داشته و داریم:

$$\lambda_1 = \frac{c\pi}{\pi} = c$$

$$\Rightarrow u(x,t) = a_1 \sin x \cos ct = 3\cos ct \sin x$$

۲- مسئله ارتعاش نخ را در حالتی حل کنید که انحراف اولیه ارتعاش برابر یکی از توابع زیر و سرعت اولیه آن صفر باشد. وضعیت ارتعاش را در چند لحظه که خود انتخاب خواهید نمود به کمک جواب حاصل از روش دالامبر رسم کنید. $(c=1)$

الف)



$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{k}{a}x & 0\leq x\leq a\\[2mm] \dfrac{k}{a-\pi}(x-\pi) & a< x\leq \pi\end{cases}$$

$$u_t(x,0)=0 \qquad u(0,t)=0 \qquad u(\pi,t)=0$$

$$c=1 \qquad L=\pi \qquad \lambda_n=\frac{cn\pi}{l}=n \qquad b_n=0$$

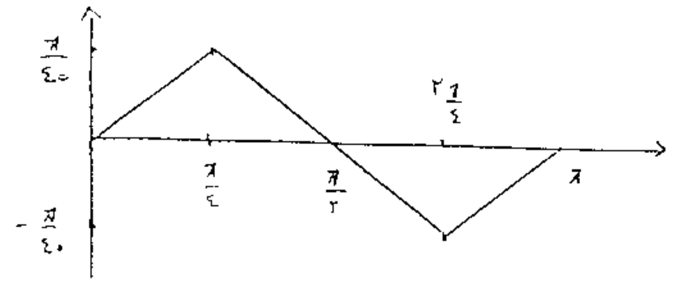
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{k}{a}x\sin nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_a^\pi \frac{k}{a-\pi}(x-\pi)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{k}{a}x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)-\frac{k}{a}\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right)\right]_0^a+\frac{2}{\pi}\left[\frac{k(x-\pi)}{a-\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)-\frac{k(-\sin nx)}{(a-\pi)n^2}\right]_a^\pi$$

$$=\frac{2k}{a(a-\pi)}\left[-\frac{\pi\sin na}{n^2}\right]=\frac{2k}{a(a-\pi)}\frac{\sin na}{n^2}\Rightarrow$$

$$u(x,t)=\frac{2k}{a(a-\pi)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}\cos nt\sin nx$$

ب)



$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ -\frac{1}{10}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \\ \frac{1}{10}(x-\pi) & \frac{3\pi}{4} < x < \pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{10}x \sin nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -\frac{1}{10}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{1}{10}(x-\pi)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{10}x\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{10}\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{10}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos nx}{n} - \frac{1}{10}\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$+\left[-\frac{1}{10}(x-\pi)\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{10}\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{3\pi/4}^{\pi} = \frac{4}{10\pi}\left[\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^2} - \frac{\sin\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\right]$$

$a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{4}{5\pi} \times \frac{1}{4} \quad a_3 = 0 \quad a_4 = \frac{4}{5\pi} \times 0 = 0 \quad a_5 = 0 \quad a_6 = \frac{4}{5\pi} \times \left(-\frac{1}{36}\right)$

$a_7 = 0 \quad a_8 = 0 \quad a_9 = 0 \quad a_{10} = \frac{4}{5\pi} \times \frac{1}{100}$

$$\Rightarrow u = \frac{4}{5\pi}\left(\frac{1}{4}\cos 2t \sin 2x - \frac{1}{36}\cos 6t \sin 6x + \frac{1}{100}\cos 10t \sin 10x \mp \cdots\right)$$

۳- جواب عمومی هریک از معادلات زیر را به روش (ضربی) بدست آورید

a. $u_x + u_y = 0$

$u = g(x)\, f(y)$

$u_x = f(y)\, \dot{g}(x) \qquad u_y = g(x)\, f'(y)$

$u_x + u_y = \dot{g}(x) f(y) + g(x) f'(y) = 0 \Rightarrow \dot{g}(x) f(y) = -g(x) f'(y) \Rightarrow \frac{g(x)}{\dot{g}(x)} = \frac{f(y)}{f'(y)} = k$

باید برابر با عدد ثابت باشد:

$f(y) + c_0 f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = A e^{-\frac{1}{c_0} y}$

$g(x) - c_0 \dot{g}(x) \Rightarrow g(x) = A' e^{\frac{1}{c_0} x}$

$$\Rightarrow U = g(x) f(y) = AA' e^{\frac{1}{c_0}(x-y)} \xrightarrow[\frac{1}{c_0} = c]{AA' = k} k e^{c(x-y)}$$

b. $y u_x = x u_y \qquad u = f(x)\, g(y) \qquad u_x = f'(x)\, g(y),\ u_y = \dot{g}(y)\, f(x)$

$y g(y) f'(x) = x f(x) \dot{g}(y) \qquad \frac{y g(y)}{\dot{g}(y)} = \frac{x f(x)}{f'(x)} = k$

$\Rightarrow y(g(y)) - k \dot{g}(y) = 0$ (1) $\qquad x f(x) - k f'(x) = 0$ (2)

(1) $\Rightarrow \frac{\dot{g}(y)}{g(y)} = \frac{y}{k} \Rightarrow \ln g(y) = \frac{1}{2k} y^2 \Rightarrow g(y) = e^{\frac{y^2}{2k}}$

(2) $\Rightarrow x f(x) = k f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{k} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2k} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{x^2}{2k}}$

$u = e^{\frac{1}{2k}(x^2 + y^2)} \sim u = e^{k(x^2+y^2)}$

c. $xu_x = yu_y$ $\qquad u_x = f'(x)g(y) \qquad u_y = \dot{g}(y)f(x)$

$$\Rightarrow x\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{y\dot{g}(y)}{g(y)} = k \Rightarrow \quad xf'(x) - kf(x) = 0 \quad ①$$

$$y\dot{g}(y) - kg(y) = 0 \quad ②$$

$$① \Rightarrow xf'(x) = kf(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال بگیر}} \ln f(x) = k\ln x + \ln c_0$$

$$\Rightarrow f(x) = c_0 x^k \quad ①'$$

$$② \Rightarrow y\dot{g}(y) = kg(y) \Rightarrow \frac{\dot{g}(y)}{g(y)} = \frac{k}{y} \Rightarrow \ln g(y) = k\ln y + \ln c_1$$

$$g(y) = c_1 y^k \quad ②'$$

$$①', ②' \Rightarrow u = c y^k x^k$$

d. $u_{xy} = u$ $\qquad u_x = f'(x)g(y) \qquad u_{xy} = \dot{g}(y)f'(x)$

$$\Rightarrow f'(x)\dot{g}(y) = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g(y)}{\dot{g}(y)} = k$$

$$f'(x) = kf(x) \Rightarrow f(x) = e^{kx}$$

$$g(y) = k\dot{g}(y) \Rightarrow g(y) = e^{\frac{y}{k}}$$

$$\Rightarrow u = e^{k(x+y)}$$

e. $u_{xx} + u_x - 2u = 0$

$$D = \frac{du}{dx} \Rightarrow (D^2 + D - 2)u = 0 \Rightarrow D = 1 \quad , D = -2$$

$$u = Ae^{x} + Be^{-2x} \quad ①$$

در ① A و B توابعی از y هستند درنتیجه خواهیم داشت:

$$u = f(y)e^{x} + g(y)e^{-2x}$$

۴- هریک از معادلات زیر را با تغییر متغیرهای داده شده حل کنید.

a) $u_{xx} + u_{xy} = 2u_{yy} \qquad v = x+y \qquad z = 2x - y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + 2\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =$$

$$\cancel{2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \implies 9\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0 = \frac{\partial u}{\partial z} = h(z)$$

$$\implies u = \int h(z)\,dz + \Phi(v) \implies$$

$$u = \varphi(z) + \Phi(v) = \varphi(2x - y) + \Phi(x+y)$$

b) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \qquad v = y \qquad z = x + y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

با جایگزاری در معادله :

$$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \cancel{- 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}} \cancel{- 2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \cancel{+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}} \cancel{+ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial v} = h(z) \rightarrow u = \int h(z)\, dv + \varphi(z)$$

$$u = v\, h(z) + \varphi(z) = y\, h(x+y) + \varphi(x+y)$$

C) $y\, u_{xy} = x\, u_{xx} + u_x \qquad v = y \qquad z = xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} + y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial z} + y\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

باجایگذاری در معادله داریم:

$$\cancel{y\frac{\partial u}{\partial z}} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + \cancel{xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} = \cancel{xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} + \cancel{y\frac{\partial u}{\partial z}}$$

$$\Rightarrow y^2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = h(z)$$

$$u = \int h(z)\, \partial z + \Phi(v) = \varphi(z) + \Phi(v) = \varphi(xy) + \Phi(y)$$

تمرینات ۷.۲. صفحه ۹۹

-(1

۱- درجه حرارت در طول یک میله به طول ۱۰cm را بیابید در صورتیکه درجه حرارت دو سر میله صفر بوده و درجه حرارت اولیه میله برابر یکی از توابع زیر باشد ($c^2=1.752$)

a) $u(x,0)=\sin 0.1\pi x$

$$\lambda_n^2=(1.752)\,\pi^2 n^2/100 \qquad u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 0.1 n\pi x = \sin 0.1\pi x$$

$$\Rightarrow b_1=1 \quad , \quad b_n=0 \quad n>1$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\, e^{-\lambda_n^2 t} = \sin 0.1\pi x\, e^{-\frac{1.752\pi^2 t}{100}}$$

b) $$f(x)=\begin{cases} x & ; \quad 0<x<5 \\ 10-x & ; \quad 5<x<10 \end{cases} \qquad \lambda_n^2=\frac{1.752\, n^2\pi^2}{100}$$

$$b_n=\frac{2}{10}\int_0^5 x\sin\frac{n\pi}{10}x\,dx+\frac{2}{10}\int_5^{10}(10-x)\sin\frac{n\pi}{10}x\,dx$$

$$=\frac{2}{10}\left[-x\left(\frac{10}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi}{10}x+\left(\frac{10}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{10}x\right]_0^5+$$

$$\frac{2}{10}\left[-(10-x)\cos\frac{n\pi}{10}x\left(\frac{10}{n\pi}\right)-\left(\frac{10}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{10}x\right]_5^{10}=\frac{40}{\pi^2}\,\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{40}{\pi^2}\,\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\sin\frac{n\pi}{10}x\,e^{-0.01752(n\pi)^2 t}$$

c) $$f(x)=\begin{cases} x & ; \quad 0<x<25 \\ 50-x & \quad 25<x<50 \end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{50}\int_0^{25} x\sin\frac{n\pi}{50}x\,dx+\frac{2}{50}\int_{25}^{50}(50-x)\sin\frac{n\pi}{5}x\,dx$$

* ادامه دقیقاً مشابه مورد قبلی سؤال است (به عهده دانشجو)

۲ـ هر یک از مسائل زیر را حل کنید

a)

$$u_t - 4u_{xx} = xt \quad ; \quad 0<x<1 \quad , \quad t>0$$

$$u(x,0) = \sin \pi x \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(0,t) = t \quad ; \quad u(1,t) = t^2 \qquad t \ge 0$$

$$u = v + w \qquad w = ax + b \longrightarrow \begin{cases} u(0,t) = t = b \Rightarrow b = t \\ u(1,t) = a + b = t^2 \Rightarrow a = t^2 - t \end{cases}$$

$$v(0,t) = 0$$

$$v(1,t) = 0$$

$$v(x,0) = \sin \pi x \qquad w = (t^2 - t)x + t$$

$$u = v + w \Rightarrow v_t - 4v_{xx} = x - xt - 1 \quad (*)$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(t) \sin n\pi x \;\Big|\; * \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\dot G(t) + 4n^2\pi^2 G(t)\right]}_{\gamma(t)} \sin n\pi x = x - xt - 1$$

$$\gamma(t) = 2\int_0^1 (x - xt - 1)\sin n\pi x \, dx = 2\left[(1-t)\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\right]$$

$$= 2\left[\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{t(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\right] = \frac{4(-1)^n}{n\pi} + \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} t - \frac{2}{n\pi}$$

$$\gamma(t) = \dot G(t) + 4n^2\pi^2 G(t) \qquad G_h = c_1 e^{-4n^2\pi^2 t}$$

C

$$D + 4n^2\pi^2 = 0 \Rightarrow D = -4n^2\pi^2 \qquad G_p = c_2 t + c_3$$

$$\to c_2 + 4n^2\pi^2(c_2 t + c_3) = \frac{4(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} 2t - \frac{2}{n\pi}$$

$$\Rightarrow 4n^2\pi^2 c_2 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \Rightarrow c_2 = \frac{2(-1)^{n+1}}{4n^3\pi^3}$$

$$c_2 + 4n^2\pi^2 c_3 = \frac{4(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} \Rightarrow c_3 = \frac{1}{4n^2\pi^2}\left[\frac{4(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{4n^3\pi^3}\right]$$

$$G(t) = c_1 e^{-4n^2\pi^2 t} + c_2 t + c_3 \Rightarrow v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_1 e^{-4n^2\pi^2 t} + c_2 t + c_3\right] \sin n\pi x$$

[illegible]

تمرینات ۹.۲ صفحه‌ی ۱۰۳

۱. مسئله‌ی گرما در میله‌ی نامتناهی را حل کنید در صورتی که دمای اولیه در میله برابر یکی از توابع زیر باشد،

a) $$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 2 \\ 0 & ; \quad x > 2 \end{cases} \quad , \quad f(-x) = f(x)$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^2 x\cos wx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{w}\sin wx + \frac{\cos wx}{w^2}\right]_0^2 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{w}\sin 2w + \frac{\cos 2w}{w^2} - \frac{\cos 0}{w^2}\right]$$

$$\Rightarrow A(w) = \frac{2}{\pi w}\left[2\sin 2w + \frac{\cos 2w - 1}{w}\right]$$

$$u(x,t) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi w}\left[2\sin 2w + \frac{\cos 2w - 1}{w}\right]\cos wx \, dw$$

تمرین قسمت ج)

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 2x\sin wx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_1^2 2x^2 \sin wx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2x}{w}\cos wx + \frac{2}{w^2}\sin wx\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2x^2}{w}\cos wx + \frac{4x}{w^2}\sin wx + \frac{4}{w^3}\cos wx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{w}\cos w + \frac{2}{w^2}\sin w\right] + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{8}{w}\cos 2w + \frac{8}{w^2}\sin 2w - \frac{4}{w^3}\cos 2w + \frac{2}{w}\cos w - \frac{4}{w^2}\sin w + \frac{4}{w^3}\cos w\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-2}{w^2}\sin w - \frac{8}{w}\cos 2w + \frac{8}{w^2}\sin 2w - \frac{4}{w^3}\cos 2w + \frac{4}{w^3}\cos w\right]$$

$$u(x,t) = \int_0^\infty B(w)\sin wx\, dx$$

بنام احد

تمرین صفحه ۱۵۲

۱. نشان دهید که

a) $\underbrace{\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big| \leqslant |z_1-z_2|}_{A}$ $\overbrace{|z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|}^{B}$

$$\begin{cases} z_1 = x_1+iy_1 \\ z_2 = x_2+iy_2 \end{cases} \Rightarrow A: \left|\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right| \leqslant \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} \cancel{x_1^2}+\cancel{y_1^2}+\cancel{x_2^2}+\cancel{y_2^2}-\cancel{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \leqslant$$

$$\leqslant \cancel{x_1^2}+\cancel{x_2^2}-\cancel{2}x_1x_2+\cancel{y_1^2}+\cancel{y_2^2}-\cancel{2}y_1y_2$$

$$\longrightarrow \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geqslant x_1x_2+y_1y_2$$

$$\longrightarrow x_1^2\cancel{x_2^2}+y_1^2\cancel{y_2^2}+y_1^2x_2^2+y_2^2x_1^2 \geqslant \cancel{x_1^2x_2^2}+\cancel{y_1^2y_2^2}+2x_1x_2y_1y_2$$

$$\longrightarrow (x_1y_2-y_1x_2)^2 \geqslant 0 \quad \text{بدیهی}$$

---

b) $\underbrace{\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leqslant |z|}_{A}$ $\overbrace{|z| \leqslant |x|+|y|}^{B}$ $\quad : \quad z = x+iy$

$$A: \frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{توان دو}} x^2+y^2+2|x||y| \leqslant 2x^2+2y^2$$

$$\rightarrow x^2+y^2-2|x||y| \geqslant 0 \rightarrow (|x|-|y|)^2 \geqslant 0 \quad \text{بدیهی}$$

$$B: \sqrt{x^2+y^2} \leqslant |x|+|y| \xrightarrow{\text{توان دو}} x^2+y^2 \leqslant x^2+y^2+2|x||y| \rightarrow |xy| \geqslant 0$$

$$B: \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} \xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2 \leqslant x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$-(x_1x_2+y_1y_2) \leqslant \sqrt{(x_1^2+y_1^2)}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ —— اگر $x_1x_2+y_1y_2$ منفی باشد بدیهی است

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \le (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$$ اگر مثبت باشد

$$\Longrightarrow (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \ge 0$$

---

c) $$\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \le \frac{|z_1|}{\big||z_2|-|z_3|\big|} \Rightarrow \frac{|z_1|}{|z_2+z_3|} \le \frac{|z_1|}{\big||z_2|-|z_3|\big|} \xrightarrow{\text{تقسیم بر } |z_1|}$$

$$\frac{1}{|z_2+z_3|} \le \frac{1}{\big||z_2|-|z_3|\big|} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} \big||z_2|-|z_3|\big| \le |z_2+z_3| \qquad \begin{cases} z_2 = x_2+iy_2 \\ z_3 = x_3+iy_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left|\sqrt{x_2^2+y_2^2} - \sqrt{x_3^2+y_3^2}\right| \le \sqrt{(x_2+x_3)^2+(y_2+y_3)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} -\sqrt{x_2^2+y_2^2}\sqrt{x_3^2+y_3^2} \le x_2x_3+y_2y_3$$: اگر $x_2x_3+y_2y_3 > 0$ باشد بدیهی است اما اگر منفی باشد

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} (x_2^2+y_2^2)(x_3^2+y_3^2) \ge (x_2x_3+y_2y_3)^2 \Rightarrow (x_2y_3-x_3y_2)^2 \ge 0$$ یعنی

---

d) $$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

$$\xrightarrow{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab} |z_1+z_2+z_1-z_2|^2 - 2(|z_1|^2-|z_2|^2)$$

$$4|z_1|^2 - 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

به کمک بسط دادن جملات اول نیز می‌توان رسید

---

۲. مقدار هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید ؟

a) $\sqrt{-i}$

ادامه ←

$\sqrt{-i} = z \Rightarrow z^2 = -i = e^{-\pi/2\, i} \quad z = e^{i((-\pi/2 + 2k\pi)/2)}$

$z_1 = e^{i(-\pi/4)} \quad z_2 = e^{i(-\pi/4 + \pi)} = e^{i3\pi/4} \quad k = 0, 1$

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

---

b) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}} = z \quad z^2 = 1 - i\sqrt{3} \quad \theta = \tan^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{1} = \angle \pi/3$

$z^2 = 2e^{i\pi/3} \Rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{i((-\pi/3 + 2k\pi)/2)} \quad k = 0, 1 \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/6} \\ z_2 = \sqrt{2}\, e^{+i5\pi/6} \end{cases}$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i/2\right) \quad z_2 = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}/2 - i/2\right)$

---

c) $\sqrt[4]{-1} = z \quad z^4 = -1 = e^{i\pi} \quad z = e^{i((\pi + 2k\pi)/4)} \quad k = 0, 1, 2, 3$

$z_1 = e^{i\pi/4}, \quad z_2 = e^{3\pi/4\, i} \quad z_3 = e^{\frac{5\pi}{4} i} \quad z_4 = e^{7\pi/4\, i}$

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad z_2 = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2 \quad z_3 = \ldots \quad z_4 = \ldots$

---

d) $\sqrt[3]{1+i} = z \quad z^3 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z = \sqrt[6]{2}\ e^{i((\pi/4 + 2k\pi)/3)} \quad k = 0, 1, 2$

$z_1 = \sqrt[6]{2}\ e^{i\pi/12} \quad z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i9\pi/12} \quad z_3 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{17\pi}{12}}$

---

۳) نشان دهید که

$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

د) با توجه به آن ثابت کنید

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin[(n+1/2)\theta]}{2\sin(\theta/2)}\;;\qquad 0<\theta<2\pi$$

$$z=\cos\theta+i\sin\theta \qquad 1+\cos\theta+i\sin\theta+\cos 2\theta+i\sin 2\theta+\dots+\cos n\theta+i\sin n\theta=\frac{1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots+\cos n\theta=\operatorname{Re}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}\right\}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم

$$=\frac{(\overbrace{1-\cos(n+1)\theta}^{2\sin^2(n+1)\theta/2}-i\sin(n+1)\theta)\cdot(\overbrace{1-\cos\theta}^{2\sin^2\theta/2}+i\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\Rightarrow \mathrm{I}$$

$$\operatorname{Re}\{\mathrm{I}\}=\frac{4\sin^2\frac{n+1}{2}\theta\,\sin^2\frac{\theta}{2}+\overbrace{\sin\theta}^{2\sin\theta/2\cos\theta/2}\,\overbrace{\sin(n+1)\theta}^{2\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n+1}{2}\theta}}{1+\cos^2\theta-2\cos\theta+\sin^2\theta}=\frac{''}{4(\sin^2\theta/2)}$$

$$=\frac{(4\sin(\frac{n+1}{2})\theta\sin\theta/2)(\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\theta/2+\cos\theta/2\cos\frac{n+1}{2}\theta)}{4\sin^2\theta/2}$$

$$=\frac{2(\sin\frac{n+1}{2}\theta)(\cos(\frac{n+1}{2}\theta-\theta/2))}{2\sin\theta/2}=\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta+\frac{n\theta}{2})+\sin(\frac{n+1}{2}\theta-\frac{n\theta}{2})}{2\sin\theta/2}$$

$$=1/2+\frac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin\theta/2}$$

---

۴) نشان دهید که اگر z یکی از ریشه‌های n ام واحد بوده و $z\neq 1$ آنگاه

$$1+z+z^2+\dots+z^{n-1}=0$$

$$z^n=1\Rightarrow z=\exp\left(\frac{i2k\pi}{n}\right)$$

$$1+z+z^2+\dots+z^{n-1}=1+\exp\left(\frac{i2\pi}{n}\right)+\exp\left(\frac{i4\pi}{n}\right)+\dots+\exp\left(i\frac{2(n-1)}{n}\right)$$

$$=\frac{1(1-\exp((\frac{i2\pi}{n})n))}{1-\exp(\frac{i2\pi}{n})}=\frac{1-\exp(i2\pi)}{\alpha}=0$$

تمرینات صفحه ۱۶۴

۱- با توجه به تعریف مشتق نقاطی را که هریک از توابع زیر دارای مشتق هستند یا دارای مشتق نیستند مشخص کنید؟

a) $f(z) = z|z|^2$

$z = x + iy \Rightarrow f(z) = x(x^2+y^2) + iy(x^2+y^2)$

$u = x(x^2+y^2) \quad , \quad V = y(x^2+y^2)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

① $x^2+y^2+2x^2 = x^2+y^2+2y^2 \Rightarrow x = y$

② $2xy = -2xy \Rightarrow x = y = 0$ پس در نقطه صفر مشتق دارد.

---

b) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \qquad z = x + iy$

$f(z) = x + y \qquad u = x + y \qquad V = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow 1 = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow 1 = 0$

۲- نقاطی را که هریک از توابع زیر مشتق پذیر، تحلیلی یا غیر تحلیلی هستند را مشخص کنید؟

a) $f(z) = z^3 \Rightarrow f(z) = (x+iy)^3 = x^3 + i3x^2y + 3x(iy)^2 + (iy)^3 =$

$x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

$$u = x^3 - 3xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow -6xy = -6xy$$

در تمام نقاط مشتق پذیر و تحلیلی است.

---

b) $f(z) = i|z|^4 = i(x^2+y^2)^2 = i(x^4+y^4+2x^2y^2)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Longrightarrow 4x^3 + 4xy^2 = 0 \quad , x = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 4y^3 + 4yx^2 \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow 4y^3 + 4yx^2 = 0 \quad y = 0$$

پس $f(z)$ در نقطهٔ $(0,0)$ تحلیلی است.

---

c) $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}\, z}{\mathrm{Im}\, z} = \dfrac{x}{y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{-x}{y^2} = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

---

d) $f(z) = (1+i)(x-y)^2 = \underbrace{(x-y)^2}_{u} + i\underbrace{(x-y)^2}_{v}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow 2(x-y) = -2(x-y) \Longrightarrow \boxed{x = y}$$ تحلیلی است

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow -2(x-y) = -2(x-y)$$

e) $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}=\frac{x+iy}{x-iy}\times\frac{x+iy}{x+iy}=\frac{x^2+2ixy+i^2y^2}{x^2+y^2}=$

$=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{2xyi}{x^2+y^2}\Longrightarrow u=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ,\quad v=\frac{2xy}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Longrightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2xy^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Longrightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2y(x^2+y^2)+2x(2xy)}{(x^2+y^2)^2}$

f) $f(z)=\mathrm{Arg}\,z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

$u=\tan^{-1}\frac{y}{x}\qquad v=0$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2}=\frac{-y/x^2}{x^2-y^2}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1/x}{1+y^2/x^2}=\frac{\frac{1}{x}x^2}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{x}x^2}{x^2+y^2}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$

۳- آیا توابع زیر همساز هستند؟ درصورت همساز بودن، توابع مزدوج همساز آن ها را بیابید
و تابع تحلیلی متناظر با آن ها را به صورت تابعی از z بنویسید؟

a) $u = e^x \cos y$

$$\begin{cases} u_x = e^x \cos y & u_{xx} = e^x \cos y \quad \Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u_y = -e^x \sin y & u_{yy} = -e^x \cos y \end{cases}$$

همساز است.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

b) $u = (x^2 - y^2)^2$

مشابه مورد بالا

c) $u = x^3 - 3xy^2$

مشابه مورد (a) حل می‌شود.

d) $u = x^2 - y^2 - 2x + 3y$

$$\begin{cases} u_x = 2x - 2 & u_{xx} = 2 & u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u_y = -2y + 3 & u_{yy} = -2 & \Rightarrow 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

در معادله لاپلاس صدق می‌کند پس تحلیلی همساز است.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2 \qquad \phi(x) = -3x$$

$$\phi'(x) = -3$$

$$v = 2xy - 2y + \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \phi'(x)$$

$$\frac{-\partial v}{\partial x} = -2y + 3 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y - 3$$

$$v = 2xy - 2y - 3x$$

---

e) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow u_x = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

$$u_{xx} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (4x(x^2+y^2))(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$u_{xx} = \frac{-2x(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) - (4x^3 + 4xy^2)(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$u_y = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow u_{yy} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2) - 2xy}{(x^2+y^2)^4}$$

$$u_{yy} = \frac{-2x(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) + 8xy^2(x^2+y^2)}{x^2 + y^2} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} \neq 0$$ همساز نیست

---

f) $u = 2xy \Rightarrow u_x = 2y,\ u_{xx} = 0 \Rightarrow u_y = 2x,\ u_{yy} = 0 \qquad 0 + 0 = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \qquad v = y^2 + \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\phi'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x \Rightarrow -2x = \phi'(x) \Rightarrow \phi(x) = -x^2 \Rightarrow v = y^2 - x^2$$

۴- a و b را طوری بیابید که هر یک از توابع زیر همساز باشند و مزدوج همساز آن‌ها را بیابید؟

a) $u = e^{ax}\cos by$

$u_{xx} = a^2 e^{ax}\cos by \qquad u_{yy} = -b^2 e^{ax}\cos by$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \implies a^2 e^{ax}\cos by - b^2 e^{ax}\cos by = 0$

$\implies e^{ax}\cos by\,(a^2 - b^2) = 0 \implies a^2 = b^2 \implies a = \pm b$

به شرط مساوی بودن a و b، همساز است.

$u = e^{ax}\cos ay \implies \dfrac{\partial u}{\partial x} = a e^{ax}\cos ay = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -a e^{ax}\sin ay$

$v(y) = e^{ax}\sin ay + \phi(x) \implies \dfrac{\partial v}{\partial y} = -a e^{ax}\cos ay - \phi'(x)$

$\phi(x) = -x \qquad -\phi'(x) = 1 \implies \phi'(x) = -1$

$\implies v(y) = e^{ax}\sin ay - x$

---

b) $u = \cos ax \cosh by$

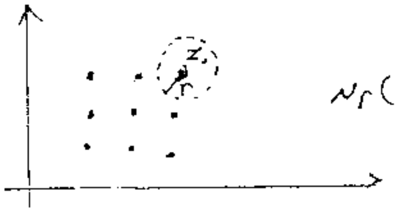
$u_{xx} = -a^2 \cos ax \cosh by \quad \to \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_{yy} = b^2 \cos ax \cosh by \quad \to \quad \cos ax \cosh by\,(b^2 - a^2) = 0$

$b^2 = a^2 \implies b = \pm a$ همساز است

ادامه سؤال مانند قسمت الف می‌باشد.

یک قطعه از اعداد صحیح هم از کرد. چون تعداد اعضا متناهی از این قطعاً وجود دارد یک همسایگی از z_0 که شامل هیچ نقطه از D نباشد مثلاً فرض کنید ناحیه D به صورت زیر باشد:



$N_r(z_0)$

حال هیچ نقطه از D نیست پس z_0 نقطه انباشتگی D نیست.

۷- تابع $f(z)=|z|^2$ در تمام صفحه مختلط پیوسته است.

حل: تابع $f(z)$ یک تابع چندجمله‌ای است و چون $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ توابع چندجمله‌ای در تمامی نقاط پیوسته هستند پس $f(z)$ در تمامی صفحه مختلط $R\times R$ پیوسته است

۸- هرگاه تابع $f(z)$ در z_0 پیوسته بوده و $f(z_0)\neq 0$ آن گاه یک همسایگی از z_0 موجود است که به ازای هر z از این همسایگی $f(z)\neq 0$ است.

حل: $f(z)$ در z_0 پیوسته است پس $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ پس داریم:

$$\forall \varepsilon>0\quad \exists \delta>0 \ni |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

و چون $f(z_0)$ صفر نیست می‌توان شعاع همسایگی آن را یعنی پیرامون $f(z_0)$ را r انتخاب کرد: $r=\frac{1}{2}|f(z_0)|$ و چون پیوسته است پس حد موجود است:

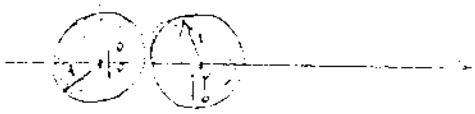
$$\exists \delta_1>0 \ni |z-z_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<r \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\frac{1}{2}|f(z_0)|$$

پس یک همسایگی $N_{\delta_1}(z_0)$ که نقش آن $f(z)$ در دایره به شعاع r و مرکز $f(z_0)$ می‌شود و چون $f(z_0)\neq 0$ است در $N_{\delta_1}(z_0)$ برهان

۵- هرگاه D مجموعه همه zهایی باشد که $|z|<1$ یا $|z-2|<1$ آنگاه D همبند نیست.

حل: ناحیه D اجتماع دو دایره به شعاع ۱ در مرکزهای $(0,0)$ و $(2,0)$ هست به مانند
شکل زیر: چون نقاط روی محیط D را شامل نمی‌شوند پس دو نقطه a و b وجود دارند که
نتوان آن‌ها را با یک خط شکسته (تعریف همبند) به هم وصل کرد، پس همبند نیست.

۸



۶- نقطه z_0 را یک نقطه انباشتگی مجموعه D نامند هرگاه هر همسایگی از z_0 شامل نقطه‌ای از
D باشد. با توجه به این تعریف نشان دهید:

الف) هر یک از نقاط یک مجموعه باز و همبند نقطه انباشتگی آن است.

حل: ۱) ناحیه D را یک مجموعه باز گویند هرگاه: $\exists \varepsilon>0 \ni N_\varepsilon(z_0)\subset D$

یعنی در مجموعه باز همواره پیرامون تمامی نقاط آن یک همسایگی به شعاع ε موجود است پس هر نقطه
مجموعه D (باز) یک نقطه انباشتگی آن است.

۲) ناحیه D را همبند گویند هرگاه بتوان هر دو نقطه دلخواه را با خط شکسته به هم وصل کرد
پس در ناحیه همبند هیچ نقطه منفرد (ایزوله) یافت نمی‌شود. در نتیجه $N_\varepsilon(z_0)$ شامل حداقل
یک نقطه است پس z_0 یک نقطه انباشتگی است.

ب) یک مجموعه متناهی نمی‌تواند شامل نقطه انباشتگی باشد.

مجموعه‌ای متناهی است که $\exists k\in N \ni D=N_k$ یعنی بتوان آن مجموعه را با

الف) $\bar{f}(z)$ نیز در D تحلیلی باشد.   ج) به ازای هر z از D تعداد f حقیقی باشد.

ب) $|f|$ در D ثابت باشد.   د) $Ref(z)$ عددی ثابت باشد.

حل: الف) راه اول

$$f(z) \text{ تحلیلی } \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ -u_y = v_x \end{cases}$$

$$f(z) = u + iv \Rightarrow \bar{f}(z) = u - iv \xrightarrow{\text{و در تحلیلی بودن}} \begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = +v_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_y = -v_y \Rightarrow v_y = 0 \\ v_x = -v_x \Rightarrow v_x = 0 \end{cases}$$ و v ثابت است؛ $$\begin{cases} u_x = -u_x \Rightarrow u_x = 0 \\ u_y = -u_y \Rightarrow u_y = 0 \end{cases}$$ u نیز ثابت است

در تابع f اگر u و v ثابت باشند کل تابع نیز ثابت است.

راه دوم:

$$\left.\begin{matrix} u_x = v_y & (1 \\ v_x = -u_y & (2 \end{matrix}\right\} \bar{f}(z) = u - iv \text{ تحلیلی است} \Rightarrow \begin{cases} u_x = (-v)_y = -v_y & (1)' \\ u_y = -(-v)_x = +v_x & (2)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1),(1)' \Rightarrow u_x = 0 \\ (2),(2)' \Rightarrow u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = c_1 \ , \ v(x,y) = c_2 \Rightarrow f(z) = c_1 + ic_2$$

یعنی ثابت است.

حل ب) $|f| = c$ پس $u^2 + v^2 = c$ از طرفین رابطه یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} u_x + v_x = 0 \\ u_y + v_y = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{u_x = v_y \\ v_x = -u_y}]{\text{چون تحلیلی است}} \begin{cases} v_y - u_y = 0 \\ v_y + u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_y = 0 & (1 \\ v_y = 0 & (2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x + v_x = 0 \\ -v_x + u_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_x = 0 & (1)' \\ v_x = 0 & (2)' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (1),(1)' : u(x,y) = c_1 \\ (2),(2)' : v(x,y) = c_2 \end{matrix} \Rightarrow f(z) = c_1 + ic_2$$

ثابت است

حل ج) $\forall z \in D \Rightarrow f(z) = Real = k \ , \ f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = k + i0$

$$\Rightarrow v(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \Rightarrow u_y = 0 \\ v_y = 0 \Rightarrow u_x = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = c \Rightarrow f(z) = c$$

یعنی f ثابت است

حل د)

$$\operatorname{Re} f(z)=k \Rightarrow u(x,y)=k \Rightarrow \begin{cases} u_x=0 \Rightarrow v_y=0 \\ u_y=0 \Rightarrow v_x=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v(x,y)=c' \Rightarrow f(z)=k+ic'=c$ تابعی ثابت است

۱۰- هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی بوده و همواره $f'(z)=0$ باشد آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است

حل: $f(z)$ در D تحلیلی است پس توابع u و v پیوسته و دارای مشتق های جزئی پیوسته هستند و در شرایط کشی-ریمان صدق می کند

$$f'(z)=u_x+iv_x=0$$

$$\begin{cases} u_x=0 \Rightarrow v_y=0 \\ v_x=0 \Rightarrow u_y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad (1):\ u(x,y)=c_1 \quad (2):\ v(x,y)=c_2 \quad \Rightarrow f(z)=c_1+ic_2=c$$

تابعی ثابت است

۱۱- مشتق هریک از توابع زیر را در نقاطی که دارای مشتق هستند بیابید و نقاطی را که تحلیلی هستند مشخص کنید

a) $f(z)=\underbrace{|x|}_{u}+i\underbrace{|y|}_{v} \xrightarrow{\text{برای تحلیلی بودن}} \begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases} \qquad u_x=\dfrac{x}{|x|}\ ,\ u_y=0$

$\Rightarrow \dfrac{x}{|x|}=\dfrac{y}{|y|} \Rightarrow xy>0$ در ناحیه اول و سوم تحلیلی است.

$v_x=0\ ,\ v_y=\dfrac{y}{|y|} \Rightarrow |x|=\dfrac{x|y|}{y}=|x| \Rightarrow f(z)=\dfrac{x|y|}{y}+i|y|$

$f'(z)=u_x+iv(x)=\dfrac{|y|}{y}+i\dfrac{y}{|y|}=\dfrac{y}{|y|}(1+i)$

b) $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{|z|}$

$z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy \Rightarrow f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - i\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$u_x = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$v_y = \dfrac{-\sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ $\xrightarrow{\text{کشی}}$ $y^2 = -x^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 0$

دایره‌ای به شعاع صفر
به مرکز مبدأ مختصات در $|z|=0$ تحلیلی است
و مقدار مشتق صفر است

---

c) $f(z) = \overbrace{(\mathrm{Re}\, z)^2}^{u} - i\overbrace{(\mathrm{Im}\, z)^2}^{v} \Rightarrow f(z) = x^2 + iy^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\mathrm{Re}\{z+\Delta z\}^2 - i\,\mathrm{Im}\{z+\Delta z\}^2 - x^2 + iy^2}{\Delta x + i\Delta y}$

$= \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\cancel{x^2} + \Delta x^2 + x2x\Delta x - \cancel{iy^2} - i\Delta y^2 - i2y\Delta y - \cancel{x^2} + \cancel{iy^2}}{\Delta x + i\Delta y}$

$\begin{cases} \Delta x \to 0 : \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{-i\Delta y(\Delta y + 2y)}{i\Delta y} = -2y \\ \Delta y \to 0 : \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cancel{x^2} + \Delta x^2 + 2x\Delta x - \cancel{x^2}}{\Delta x} = 2x \end{cases} \Rightarrow 2x = -2y \Rightarrow x = -y$

روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم تحلیلی است

$x = -y \Rightarrow f(z) = y^2 - iy^2 \Rightarrow \begin{cases} u = y^2 \\ v = -y^2 \end{cases} \Rightarrow f'(z) = u_y - iv_y$

$\Rightarrow f'(z) = 2y + i2y$ در $x=-y$

---

d) $f(z) = \underbrace{|y|}_{u} - i\underbrace{|x|}_{v} \longrightarrow u_x = v_y \;,\; u_y = \dfrac{y}{|y|} \;,\; v_x = \dfrac{-x}{|x|}$

$u_y = -v_x \Rightarrow \dfrac{y}{|y|} = \dfrac{x}{|x|} \Rightarrow xy > 0$ در ربع اول و سوم تحلیلی است

$|x| = \dfrac{x|y|}{y} \Rightarrow f(z) = |y| - i\dfrac{x|y|}{y}$

$f'(z) = u_y - iv_y \Rightarrow f'(z) = \dfrac{y}{|y|} + i\dfrac{|y|}{y} = \dfrac{|y|}{y}(1+i)$

e) $f(z) = \underbrace{\cos(x+y)}_{u} + i\underbrace{\cos(x-y)}_{v}$ / $\begin{cases} u_x = v_y \\ v_y = -v_x \end{cases}$

$\begin{cases} u_x = -\sin(x+y) \\ v_y = \sin(x-y) \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y \Rightarrow -\sin(x+y) = \sin(x-y) \Rightarrow$

$\sin(x-y) + \sin(x+y) = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos y = 0$

$\begin{cases} u_y = -\sin(x+y) \\ -v_x = \sin(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & x = k\pi \\ \cos y = 0 & y = 2k\pi \pm \pi/2 \end{cases}$

حماشد ولی است.

تابع در محل برخورد این دسته خطوط تحلیلی است

در خود این خطوط نیز تحلیلی می باشد و مقدار مشتق در نقاط برخورد صفر است.

$x = k\pi \Rightarrow f(z) = \cos(k\pi + y) + i\cos(k\pi - y) \Rightarrow f'(z) = -\sin(k\pi + y)$

$-i\sin(k\pi - y) \Big|_{y = 2k\pi \pm \pi/2} \Rightarrow f'(z) = 0$

---

f) $f(z) = \underbrace{\cos x}_{u} + i\underbrace{\cos y}_{v}$ $\begin{cases} u_x = -\sin x \\ v_y = -\sin y \end{cases} \Rightarrow \sin x = \sin y$

$f(z) = \cos(2k\pi + y) + i\cos y)$ در این نقاط تحلیلی است $\begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi + \pi - y \end{cases}$

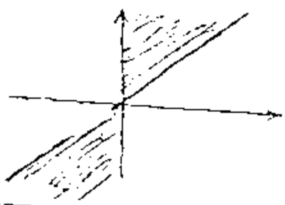
$f(z) = \cos y + i\cos y \Rightarrow f'(z) = -\sin y + i\sin y$

---

g) $f(z) = |x-y| + i|x+y|$: $u_x = v_y \Rightarrow \frac{x-y}{|x-y|} = \frac{x+y}{|x+y|} \Rightarrow$

$(x-y)(x+y) > 0$ $\xrightarrow[x<-y]{x>y}$ $f(z) = x - y + i(x+y) \rightarrow \begin{matrix} u_x = 1 \\ v_x = 1 \end{matrix}$ تحلیلی

$f'(z) = 1 + i$

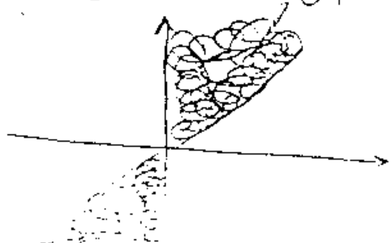


---

h) $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ $u_x = v_y \rightarrow \frac{2x(x^2-y^2)}{|x^2-y^2|} = \frac{2x^2y}{|xy|}$

$\rightarrow \frac{x^2-y^2}{|x^2-y^2|} = \frac{xy}{|xy|} \rightarrow xy(x^4 - y^4) > 0$

در این نواحی



۳.۱۰. تمرینات: صفحات (۱۸۸ تا ۱۹۲)

۱- نقش هریک از منحنی های زیر را با نگاشت $w=z^2$ بیابید.

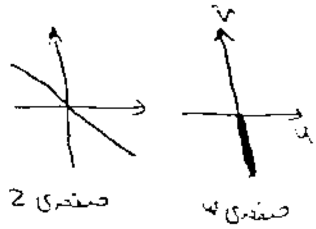
a) $y=-x$

$w = x^2-y^2+2xyi$

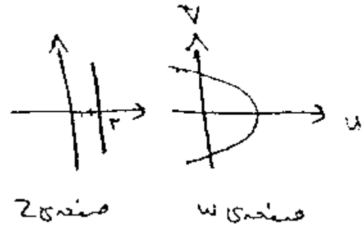
$u=x^2-y^2$

$v=2xy$

$y=-x \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=-2x^2 \leq 0 \end{cases} \quad w=-2x^2 i$



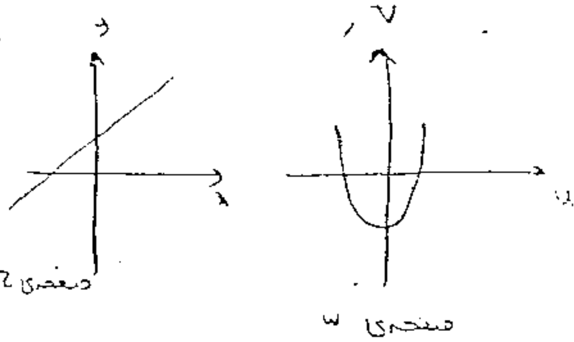
b) $x=3 \quad \begin{cases} u=3^2-y^2 \\ v=6y \end{cases} \rightarrow u=9-\frac{v^2}{36} \rightarrow u+\frac{v^2}{36}=9$



c) $y=1+x$

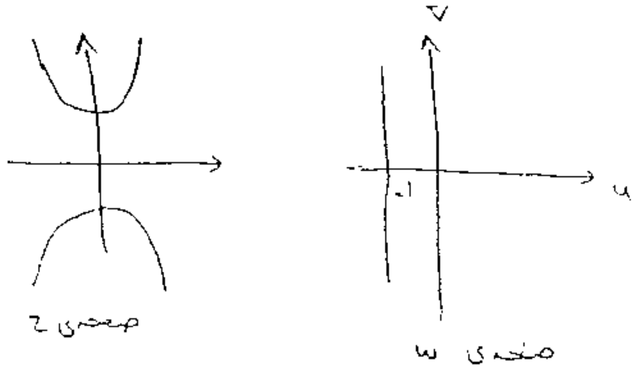
$\begin{cases} u=x^2-(1+x)^2 \\ v=2x(1+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=2x+1 \\ v=2x^2+2x \end{cases}$

$\Rightarrow x=\frac{u-1}{2} \Rightarrow v=\frac{u^2-1}{2}$



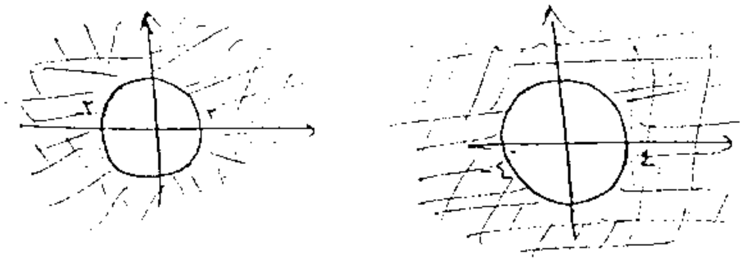
d) $y^2=x^2+1$

$\begin{cases} u=x^2-x^2-1 \Rightarrow u=-1 \\ v=2x\sqrt{x^2+1} \end{cases}$



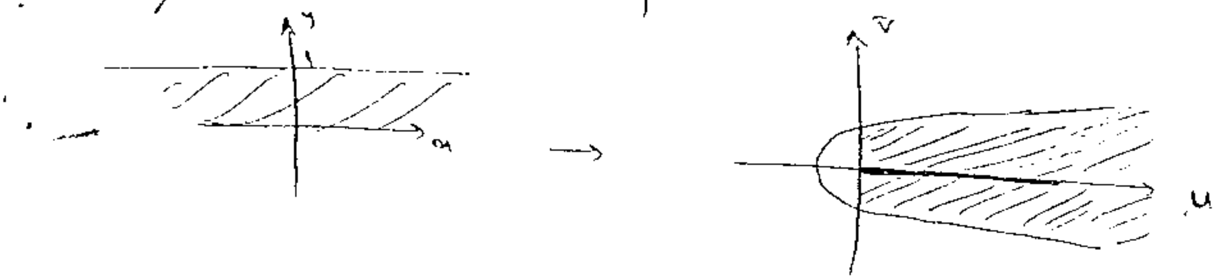
۲- نقش تصویر نواحی زیر را با نگاشت $w=z^2$ بیابید.

a) $|z|>2 \longrightarrow |w|=|z^2|=|z|^2>2^2 \longrightarrow |w|>4$



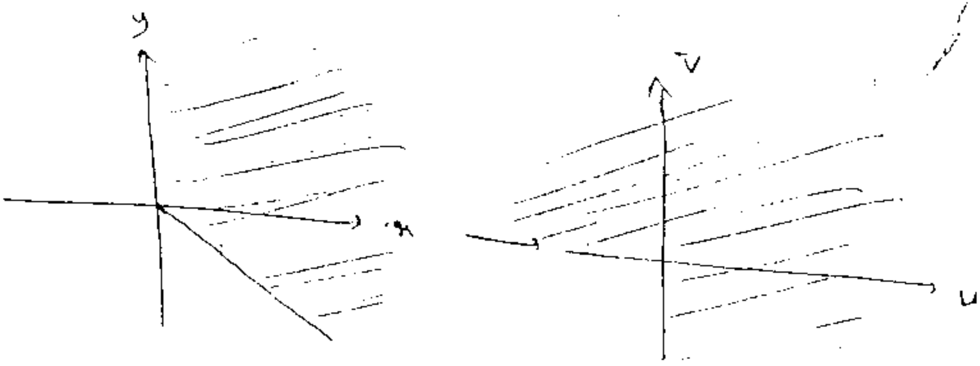
b) $0<y<1$ $\qquad z^2=\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$ $\qquad$ if $y=0 \Rightarrow \begin{cases} u=x^2 \\ v=0 \end{cases}$

if $y=1 \Rightarrow \begin{cases} u=x^2-1 \\ v=2x \end{cases} \Longrightarrow u=\dfrac{v^2}{4}-1$



c) $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4} \longrightarrow z=re^{i\theta} \longrightarrow z^2=r^2e^{2\theta i}$

$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4} \longrightarrow -\frac{\pi}{2}<2\theta<\pi$



۳- نقش هر یک از منحنی‌های زیر را با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید:

a) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \Rightarrow \arg z = -\arg w \qquad |w| = \frac{1}{|z|}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \arg w < 0$$

b) $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \arg w < \frac{\pi}{4}$

c) $0 < x < 1 \qquad 0 < y < 1$

$$w = \frac{1}{z} \rightarrow z = \frac{1}{w} = \frac{u - iv}{u^2+v^2} \qquad \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = -\dfrac{v}{u^2+v^2} \end{array} \right.$$

$x = 0 \longrightarrow u = 0$

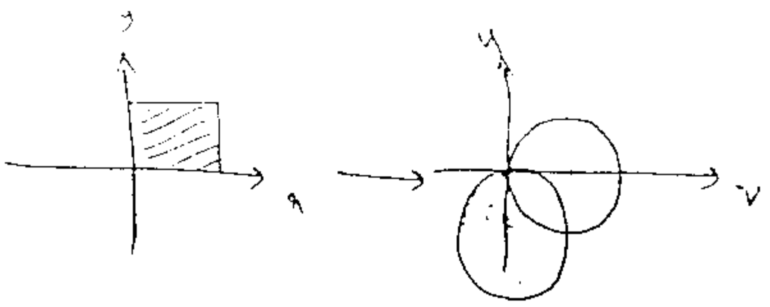
$x = 1 \Rightarrow u^2+v^2 = u \rightarrow (u-\frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4} \rightarrow |u - \frac{1}{2} + iv| = \frac{1}{2}$

$|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$y = 0 \longrightarrow v = 0$

$y = 1 \longrightarrow 1 = -\frac{v}{u^2+v^2} \rightarrow u^2+v^2+v = 0 \rightarrow u^2 + (v+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$|u + iv + \frac{1}{2}i| = \frac{1}{2} \Rightarrow |w + \frac{i}{2}| =$



۴- نقش هر یک از نواحی زیر را با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بیابید:

a) $|z+1|=1 \longrightarrow \left|\frac{1}{w}+1\right|=1 \longrightarrow \frac{|1+w|}{|w|}=1 \longrightarrow |1+w|=|w|$

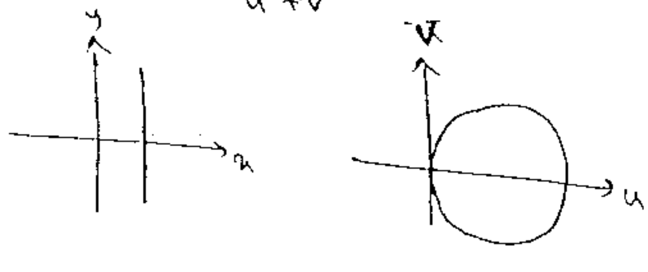
$|(u+1+iv)|^{۲}=|u+iv|^{۲} \longrightarrow (u+1)^{۲}+v^{۲}=u^{۲}+v^{۲} \longrightarrow u=-\frac{1}{۲}$

b) $y=x-1 \qquad z=\frac{1}{w} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{u}{u^{۲}+v^{۲}} \\ y=\frac{-v}{u^{۲}+v^{۲}} \end{cases} \longrightarrow y=x-1$

$\Rightarrow \frac{u}{u^{۲}+v^{۲}}+\frac{v}{u^{۲}+v^{۲}}=1 \Rightarrow u+v=u^{۲}+v^{۲}$

$\Rightarrow \left(u-\frac{1}{۲}\right)^{۲}+\left(v+\frac{1}{۲}\right)^{۲}=\left(\frac{1}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}$

c) $x=۱ \Rightarrow 1=\frac{u}{u^{۲}+v^{۲}} \rightarrow u^{۲}+v^{۲}=u \Rightarrow \left(u-\frac{1}{۲}\right)^{۲}+v^{۲}=\frac{1}{۴}$



d) $|z-۳i|=۳ \qquad \left|\frac{1}{w}-۳i\right|=۳$

$\frac{|1-۳wi|}{|w|}=۳ \rightarrow |1-۳iu+۳v|=۳|w|$

$\rightarrow (1+۳v)^{۲}+(۳u)^{۲}=۹(u^{۲}+v^{۲}) \rightarrow u^{۲}=-\frac{1}{۹} \Rightarrow u=\pm\frac{1}{۳}i$

۵ـ نقش ناحیه‌ی $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ را با هریک از نگاشت‌های زیر بیابید:

a) $w = iz \longrightarrow w = e^{i\frac{\pi}{2}} r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{3\pi}{4}$

b) $w = z^2 \longrightarrow w = r^2 e^{2i\theta} \longrightarrow 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$

c) $w = iz^2 \longrightarrow w = e^{i\frac{\pi}{2}} r^2 e^{2i\theta} \longrightarrow \frac{\pi}{2} < \arg w < \pi$

d) $w = -iz^2 \longrightarrow w = r^2 e^{2i\theta} e^{-\frac{\pi}{2} i} \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg w < 0$

e) $w = r^3 e^{3i\theta} = z^3 \longrightarrow 0 < \arg w < \frac{3\pi}{4}$

۶ـ تبدیل موبیوسی بیابید که

a- f سه نقطه‌ی ۰ و ۱ و ۲ را به‌ترتیب روی ۱ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ بنگارد.

$z_1\ z_2\ z_3 \qquad w_1\ w_2\ w_3$

$$\frac{w-1}{w-\frac{1}{3}} \times \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{z-0}{z-2} \times \frac{1-2}{1}$$

b) i، ۰، i- را به‌ترتیب روی ۰، ۱-، ∞ بنگارد.

$$\frac{w-0}{w-\infty} \times \frac{-1-\infty}{-1-0} = \frac{z+i}{z-i} \times \frac{0-i}{0+i}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{w-\infty}{-1-\infty}\right) \frac{-1}{w} = -\frac{z+i}{z-i} \Longrightarrow (1)\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{z+i}{z-i} \Rightarrow w = \frac{z-i}{z+i}$$

c) $z = 0$ نقطه‌ی ثابت آن باشد.

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = z_1$$

$$\text{if } (z_1 = 0) \Rightarrow \frac{a \times 0 + b}{c \times 0 + d} = 0 \Rightarrow \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow w = \frac{az}{cz + d}$$

d) ناحیه $|z|<1$ را بروی $|w|<1$ طوری بنگارید که $z=\frac{i}{4}$ بروی $w=0$ نگاشته شود.

$$\frac{w-1}{w-0}\times\frac{-1-0}{-1-1}=\frac{z+1}{z-\frac{i}{4}}\times\frac{1-\frac{i}{4}}{1+1}=\frac{(z-1)i}{z-i}$$

e) ناحیه $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ را بروی قرص یکه $|w|=1$ بنگارید.

مانند مثال حل شده در صفحه ۱۷۶ کتاب دکتر شیدفر داریم:

$w_1=z^4 \longrightarrow$ ناحیه را به $\operatorname{Im}(z)>0$ تبدیل می‌کند

$$w=e^{i\alpha}\,\frac{z^4-z_0}{z^4-\bar{z}_0}\ ;\ \operatorname{Im}(z_0)>0$$

f) نقاط $\pm i$ نقاط ثابت آن باشند.

* حل

$$\frac{az+b}{cz+d}=z$$

$z_1=i \Rightarrow ai+b=i(ci+d)=-c+id$ HX1

$z_2=-i \Rightarrow -ai+b=-i(-ci+d)=-c-di$ XH2

$HX1+XH2 \Rightarrow b=-c \Rightarrow c=-b$

$HX1-XH2 \Rightarrow ai=di \Rightarrow d=a$

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{az+b}{-bz+a}=\frac{b+az}{a-bz}\qquad \forall a,b\in\mathbb{C}$$

۱۰- ثابت کنید که اگر مبدا مختصات نقطه ثابت یک تبدیل دوخطی باشد آنگاه آن تبدیل را می‌توان به صورت $w = \frac{z}{cz+d}$ نوشت

* اثبات:

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$f(z) = z \overset{\text{اگر}}{\underset{z=0}{\Longrightarrow}} \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow w = \frac{az}{cz+d}$$

$$a \neq 0 \Rightarrow w = \frac{z}{\frac{c}{a}z + \frac{d}{a}} = \frac{z}{c'z + d'}$$

۱۱- نشان دهید با تبدیل $w = \frac{z-2}{z}$ قرص $|z-1| \leq 1$ روی نیم صفحه $Re\, w \leq 0$ نگاشته می‌شود.

$$w = \frac{z-2}{z} = 1 - \frac{2}{z}$$

* اثبات:

نگاشت w ابتدا $|z-1| \leq 1$ را تحت نگاشت $\frac{1}{z}$ تصویر کرده و سپس با تبدیل $2e^{i\pi}$ دو برابر کرده و به اندازه π رادیان دوران می‌دهد و در نهایت به اندازه $1+0i$ جابجا می‌کند.

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \qquad x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad , \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

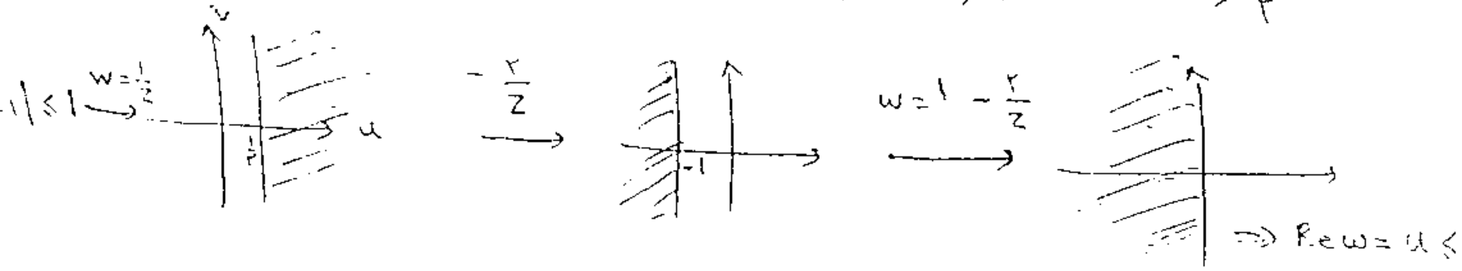
$$|z-1| \leq 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$(x-1) = \frac{u - u^2 - v^2}{u^2+v^2} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = \left(\frac{u-u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2 + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow (u - u^2 - v^2)^2 + v^2 \leq (u^2+v^2)^2$$

بعد از ساده کردن $\Rightarrow$ $u^2 - 2u^3 - 2uv^2 + v^2 \leq 0 \Rightarrow u^2(1-2u) + v^2(1-2u) \leq 0$

$$\Rightarrow (u^2+v^2)(1-2u) \leq 0 \Rightarrow (1-2u) \leq 0 \Rightarrow u \geq \frac{1}{2}$$

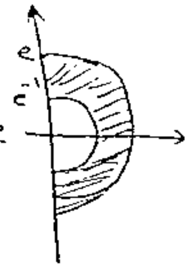


۱۲- نقش ناحیه‌های زیر را با تبدیل $w=e^z$ بیابید:

a) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ و $-1 < x < 1$

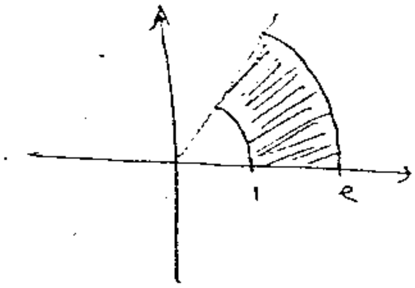
$w = e^{x} e^{iy}$ $\qquad \rho = e^{x}$ و $-1 < x < 1 \to e^{-1} < \rho < e$

$\varphi = y$ زاویه $\qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$



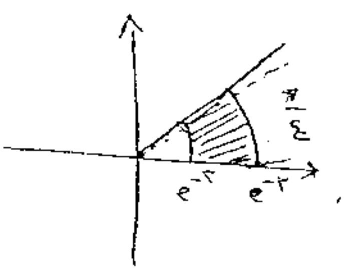
b) $0 < x < 2 \Rightarrow 1 < \rho < e^{2}$

$0 < y < 1 \to 0 < \varphi < 1$



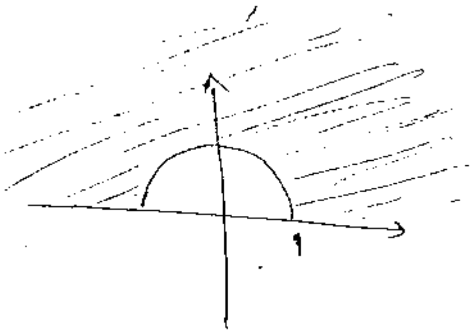
c) $-3 < x < -2 \Rightarrow e^{-3} < \rho < e^{-2}$

$0 < \ < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$



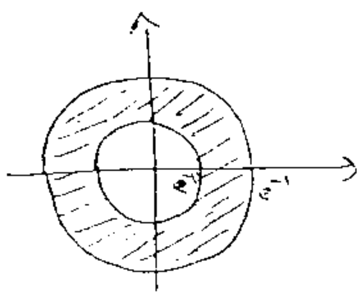
d) $x \geq 0 \Rightarrow \rho \geq 1$

$0 < y < \pi \Rightarrow 0 < \varphi < \pi$



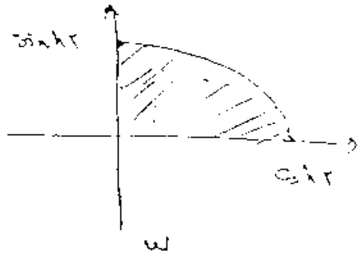
e) $-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow e^{-1} < \rho < e^{3}$

$-\pi < y < \pi \Rightarrow -\pi < \varphi < \pi$



۱۳ـ مستطیل‌های مرکب از نواحی زیر را با نگاشت $w = \sin z$ بیابید.

$w = \sin z \rightarrow w = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x$



$u = \sin x \cosh y \qquad v = \sinh y \cos x$

$y = 0 \;,\; 0 < x < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 0 < u < 1 \;,\; v = 0$

$y = 2 \;,\; 0 < x < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 2} + \frac{v^2}{\sinh^2 2} = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \;,\; 0 < y < 2 \;\Rightarrow\; 0 < u < \cosh 2 \;,\; v = 0$

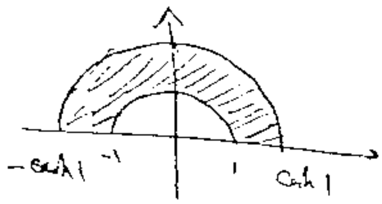
$x = 0 \;,\; 0 < y < 2 \;\Rightarrow\; u = 0 \;,\; v = \sinh y \Rightarrow 0 < v < \sinh 2$

b) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \qquad 0 < y < 1$

$y = 0 \;,\; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; -1 < u < 1 \;,\; v = 0$

$y = 1 \;,\; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} u = \sin x \cosh 1 \\ v = \sinh 1 \cos x \end{array} \;\Rightarrow\; \frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \;,\; 0 < y < 1 \Rightarrow 1 < u < \cosh 1 \;,\; v = 0$



$x = -\frac{\pi}{2} \;,\; 0 < y < 1 \Rightarrow -1 < u < -\cosh 1 \;,\; v = 0$

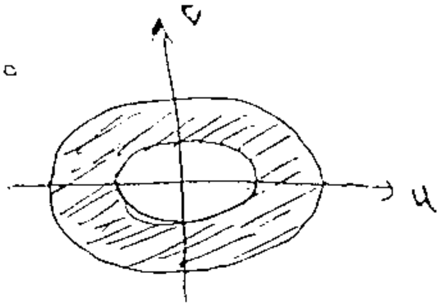
c) $0 < x < 2\pi \qquad 1 < y < 2$

$y = 1 \;,\; 0 < x < 2\pi \Rightarrow u = \sin x \cosh 1 \;,\; v = \sinh 1 \cos x \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$

$y = 2 \;,\; 0 < x < 2\pi \Rightarrow u = \sin x \cosh 2 \;,\; v = \sinh 2 \cos x \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 2} + \frac{v^2}{\sinh^2 2} = 1$

$x = 0 \;,\; 1 < y < 2 \Rightarrow u = 0 \;,\; \sinh 1 < v < \sinh 2$

$x = 2\pi \;,\; 1 < y < 2 \Rightarrow \sinh 1 < v < \sinh 2 \;,\; u = 0$



۱۴- نشان دهید که $w=\sin z$ خط $x=c$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$ را به طور یک به یک بروی شاخه‌ی سمت راست یک هذلولی می‌نگارد.

* اثبات:

$$u=\sin x\cosh y \qquad v=\cos x\sinh y$$

$$x=c \Rightarrow u=\sin c\cosh y \quad , \quad v=\cos c\sinh y$$

$$\frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$$

چون $\sin c>0$ و $\cosh y>0$ پس $u>0$ و خط $x=c$ بروی شاخه‌ی سمت راست نگاشته شود.

۱۵- نشان دهید تحت تبدیل $w=\sin z$ نقش ناحیه $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ و $0\leq y\leq 1$ پاره‌خط‌های $A'D'$ و $A'E'$ و منحنی $E'D'$ است که در آن $E'D'$ قسمتی از یک بیضی است.

$$u=\sin x\cosh y \quad ; \quad v=\cos x\sinh y$$

خط $y=0 \Rightarrow u=\sin x \; , \; v=0$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \; , \; v=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1 \quad v=0 \end{cases}$$

خط $x=0 \Rightarrow u=0 \; , \; v=\sinh y$

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow u=0 \; , \; v=0 \\ y=1 \Rightarrow u=0 \; , \; v=\sinh 1 \end{cases}$$

خط $y=1 \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 1}+\frac{v^2}{\sinh^2 1}=1$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \quad v=\sinh 1 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=\cosh 1 \quad v=0 \end{cases}$$

که در حالت کلی بیضی است
صادق است

۱۴- نشان دهید نگاشت $w = \cosh z$ پاره‌خط $z = iy$ $(0 \leq y \leq \frac{\pi}{2})$ را روی پاره‌خط $0 \leq u \leq 1$ و $v = 0$ می‌نگارد.

* جواب:

$$w = \cosh z = \cosh iy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y$$

$$w = \cos y + i0 \Rightarrow u = \cos y \;, \; v = 0$$

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq u \leq 1$$

* صورت درست سؤال بدین ترتیب است:

۱۷ـ نشان دهید که تبدیل $w=\sin^2 z$ ناحیه‌ی $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ و $y\le 0$ را به روی ناحیه‌ی $v\le 0$ می‌نگارد.

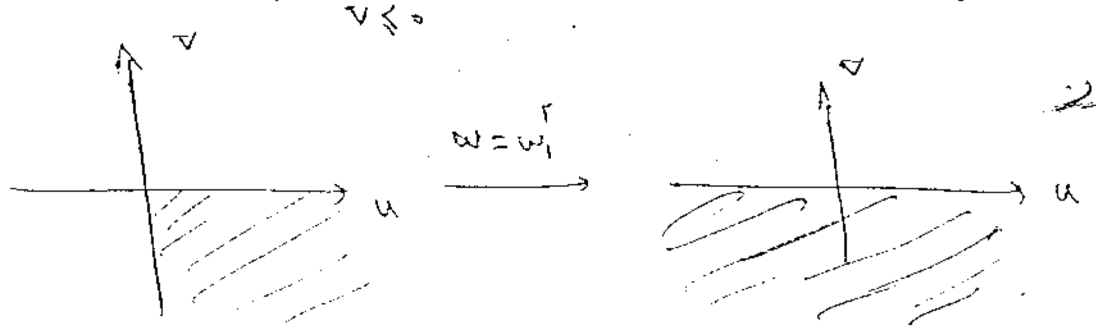
* این نگاشت را ترکیب دو نگاشت مقابل می‌گیریم: $w_1=\sin z \quad , w_2=w_1^2$

$$\begin{matrix}0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ y\le 0\end{matrix} \Rightarrow w_1=\sin z \Rightarrow \begin{matrix}u=\sin x\cosh y\\ v=\cos x\sinh y\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ y\le 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\sin x\ge 0\\ \cosh y>0\end{matrix} \Rightarrow u\ge 0 \ , \ v\le 0$$

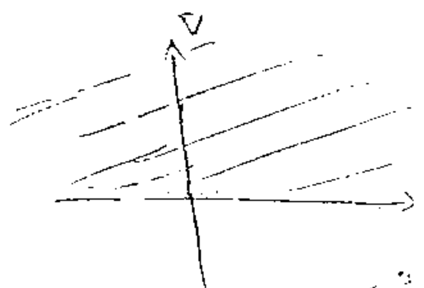
$$0<x=c<\frac{\pi}{2} \xrightarrow{w_1=\sin z} \frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$$

هذلولی‌های با مجانب $v=\pm\cot c\,u$ که ناحیه‌ی $\begin{matrix}u\ge 0\\ v\le 0\end{matrix}$ را می‌پوشانند تحت $w=w_1^2$ زاویه ۲ برابر می‌شوند.



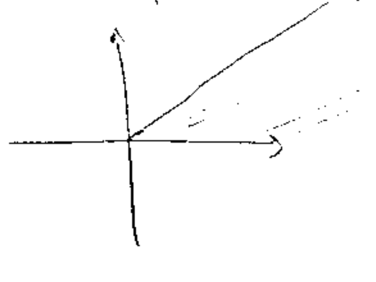
۱۸ـ نشان دهید که تحت تبدیل $w=(\sin z)^{\frac{1}{4}}$ نوار نیمه‌متناهی $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ و $y\ge 0$ به روی قسمتی از ربع اول که زیر خط $u=v$ واقع است نگاشته می‌شود. کرانه‌اش را مشخص کنید.

$w_1=\sin z \quad , w_2=w=w_1^{\frac{1}{4}}$



$$\begin{matrix}u=\sin x\cosh y\\ v=\cos x\sinh y\end{matrix} \xrightarrow[y\ge 0]{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}} \begin{matrix}-\infty<u<+\infty\\ v\ge 0\end{matrix}$$

$$w=w_1^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \theta\to\theta/4$$



۱۹- نقش هریک از نواحی زیر را با تبدیل $w=\cos z$ بیابید.

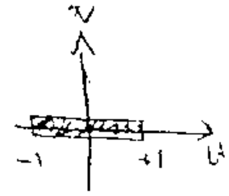
a) $y \geq 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y = u+iv$$

$$y \geq 0 \Rightarrow \cosh y \geq 1 \quad , \sinh y \geq 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \sin x \leq 1$$

$u = \cos x \cosh y$ if $y=0 \Rightarrow u = \cos x \; , \; v = 0 \Rightarrow$



$v = \sin x \sinh y$ if $y \neq 0 \Rightarrow y = c > 0 \Rightarrow u = \cos x \cosh c$

$v = \sin x \sinh c$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1 \qquad \forall x \in [0, \pi]$$

* نقش حاصل یک بیضی با خروج از مرکز $e = \frac{1}{\cosh c}$ است که با افزایش c کوچک شده و به خط متمایل می‌شود.

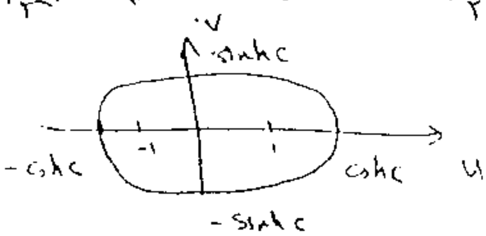
b) $\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

$$\begin{matrix} u = \cos x \cosh y \\ v = \sin x \sinh y \end{matrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \leq c \leq 1]{y=c} \frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{1}{\cosh c}$$

$$\frac{1}{2} \leq c \leq 1 \Rightarrow \cosh \frac{1}{2} \leq \cosh c \leq \cosh 1 \Rightarrow \cosh 1 \leq \frac{1}{\cosh c} \leq \cosh \frac{1}{2}$$

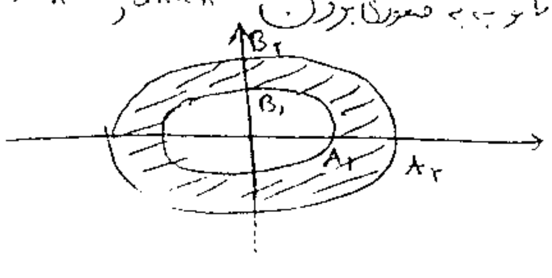
$$\forall c \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$



که با توجه به صعودی بودن $\sinh x$, $\cosh x$ داریم

$A_1 \Big|^{\cosh \frac{1}{2}}_{0} \qquad B_1 = \Big|^{\sinh \frac{1}{2}}_{0}$

$A_2 = \Big|^{\cosh 1}_{0} \qquad B_2 = \Big|^{\sinh 1}_{0}$



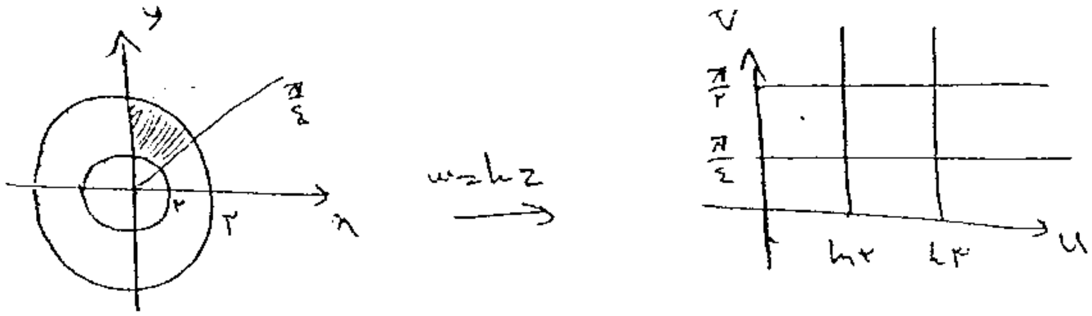
۲۰ـ نقش ناحیه ی $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $2 \leq |z| \leq 3$ را با تبدیل $w = \ln z$ بیابید.

* جواب : شاخه اصلی $\ln$ $\qquad w = \ln z = \ln|z| + i\theta$

$$2 \leq |z| \leq 3 \Rightarrow \ln 2 \leq \ln|z| \leq \ln 3$$

$$\ln 2 \leq u \leq \ln 3$$

$$v = \theta \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$



۲۱ـ با استفاده از صورت قطبی z نشان دهید که تبدیل $w = z + \frac{1}{z}$ هر دو نیم بالایی و پایینی دایره $|z| = 1$ را به روی پاره خط $-2 \leq u \leq 2$ و $v = 0$ می نگارد.

* جواب : نقاط دایره $|z| = 1$ را با : $\qquad z = e^{i\theta}$

$$w = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta + \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = 2\cos\theta = u + iv$$

$$v = 0$$

$$u = 2\cos\theta \Rightarrow -1 \leq \cos\theta \leq 1 \Rightarrow -2 \leq u \leq 2$$

۲۰- نشان دهید

a) $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$

$\cos \bar{z} = \cos(x - iy) = \cos x \cos iy + \sin x \sin iy = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$

$\overline{\cos z} = \bar{w}$, $w = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$\bar{w} = \overline{\cos z} = \cosh y \cos x + i \sin x \sinh y = \cos \bar{z}$

$\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$ $\qquad \sin \bar{z} = \sin(x - iy) = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$

$\overline{\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y} = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = \overline{\sin z}$

b) $|\sinh y| \leqslant |\cos z| \leqslant \cosh y$

$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \leqslant \cosh^2 y \cos^2 x + \sin^2 x \sinh^2 y$

$\leqslant \cosh^2 y (\sin^2 x + \cos^2 x) = \cosh^2 y$ ($\sinh y \leqslant \cosh y$ چون داریم)

$|\cos z| \leqslant |\cosh y| = \cosh y$

$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \geqslant \cos^2 x \sinh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = \sinh^2 y$

$|\cos z| \geqslant \sinh y \Rightarrow |\sinh y| \leqslant |\cos z| \leqslant \cosh y$

c) $|\cosh z| \leqslant \cosh x$

$|\cosh z| = \frac{1}{2}|e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}| \leqslant \frac{1}{2}|e^x e^{iy}| + \frac{1}{2}|e^{-x} e^{-iy}|$

$|e^{iy}| \leqslant 1 \Rightarrow |\cosh z| \leqslant \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \cosh x$

d) $\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$

$$\sin^{-1} z = w \Rightarrow z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}}$$

$$e^{2iw} - 1 = 2ize^{iw} \quad , \quad e^{iw} = a$$

$$a^2 - 1 = 2iza \Rightarrow a^2 - 2iaz - 1 = 0 \qquad a = iz \pm \sqrt{1-z^2} \Rightarrow a = iz + \sqrt{1-z^2} = e^{iw}$$

چون e^{iw} مقدار [illegible] جواب با علامت منفی نادرست است.

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2} \Rightarrow iw = \ln(iz + \sqrt{1-z^2}) \Rightarrow w = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$$

e) $\cos^{-1} z = w \Rightarrow z = \cos w = \dfrac{e^{2iw} + 1}{2ie^{iw}}$

$$e^{2iw} + 1 - 2ze^{iw} = a^2 + 1 - 2za = 0 \Rightarrow a = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = e^{iw}$$

$$\Rightarrow w = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

f) $\cosh^{-1} z = w \Rightarrow z = \cosh w = \dfrac{e^{2w} + 1}{2e^{w}}$

$$a^2 + 1 - 2az = 0 \Rightarrow a = z \pm \sqrt{z^2 - 1} \Rightarrow w = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

g) $\tan^{-1} z = w \Rightarrow z = \tan w = \dfrac{\sin w}{\cos w} = \dfrac{(e^{iw} - e^{-iw})/2i}{(e^{iw} + e^{-iw})/2}$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = -i \frac{(e^{iw})^2 - 1}{(e^{iw})^2 + 1} \Rightarrow \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \frac{z}{i} = -iz$$

$$a^2 = \frac{1 + iz}{1 - iz} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{i - z^2}{i + z^2}} = e^{iw}$$

$$iw = \ln\left(\frac{i - z^2}{i + z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{i - z^2}{i + z^2}$$

*(کتاب اشتباه محاسبه کرده)

۲۳- کلیه ریشه‌های معادله $\sin z = \cosh ۴$ را بیابید.

*حل مسأله:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x = \cosh ۴ + i0$$

$$\cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{or} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin x \cdot \cosh y = \cosh ۴$$

if $y = 0 \Rightarrow \sin x = \cosh ۴$ ✗ $\Rightarrow y \neq 0$

if $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k فرد $\Rightarrow -\cosh y = \cosh ۴$ ✗

if $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k زوج $\Rightarrow \cosh y = \cosh ۴$

با توجه به زوج بودن $\cosh y$ داریم:

$$y = -۴, ۴ \Rightarrow \begin{cases} x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, & k \text{ زوج} \\ y = -۴, ۴ \end{cases}$$

۲۴- کلیه ریشه‌های معادله $\cos z = 2$ را بیابید.

$\cos z = 2 \qquad \cos(x + iy)$

* حل:

$$\cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y = 2$$

$$\sin x \sinh y = 0 \quad \begin{cases} \sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi \quad (\mathrm{I}) \\ \sinh y = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow \cos x = 2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\cos x \cosh y = 2$$

$(\mathrm{I}) \longrightarrow$

$x = 2n\pi \longrightarrow \cosh y = -2$ غ ق ق

$x = (2n-1)\pi \longrightarrow \cosh y = 2 \quad y = \cosh^{-1} 2$

$$\left.\begin{array}{l} x = (2n-1)\pi \\ y = \cosh^{-1} 2 \end{array}\right\}$$ ← مجموعه جواب به صورت

۲۵ـ نشان دهید $\overline{\cos(iz)} = \cos(i\bar{z})$ اگر و فقط اگر $z = n\pi i$.

* جواب

① $\cos iz = \cos i(x+iy) = \cos(-y+ix) = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$

② $\cos iz = \cos(-y+ix) = \cos(-y-ix) = \cos y \cosh x - i \sin y \sinh x$

از ① و ② مسئله فوقا حاصل می‌شود.

* نکته: $\cosh x$, $\cos x$ توابعی زوج و $\sin x$, $\sinh x$ توابعی فرد هستند.

۲۶ـ کلیه ریشه‌های معادله $\sinh z = i$ را بیابید.

* جواب:

$\sinh z = i$

$\sinh(x+iy) = \sinh x \cosh iy + \sinh iy \cosh x = \sinh x \cos y + i \sin y \cosh x = i$

$\sinh x . \cos y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{or} \\ y = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\sin y . \cosh x = 1$

if $x = 0 \Rightarrow \sin y = 1 \Rightarrow y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; زوج k

if $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ فرد k $\Rightarrow \cosh x = -1$ ✗

if $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, زوج k $\Rightarrow \cosh x = 1 \Rightarrow x = -i , 1$

۲۷ـ ثابت کنید که اگر $z = re^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $r > 0$

آنگاه $\ln z^2 = 2\ln z$

* جواب

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta} \Rightarrow -\pi < 2\theta < \pi$$

شاخه اصلی

$$\ln z^2 = \ln|z|^2 + i2\theta = 2(\ln|z| + i\theta) = 2\ln z$$

* تحت نگاشت $w = z^2$ ناحیه $r > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ـ تمامی صفحه‌ی مختلط را پوشش می‌دهد. حال اگر $-\pi < \theta < \pi$ باشد صفحه مختلط دوبار پوشیده می‌شود، z^2 ما را از حالت تابع بودن خارج می‌کند.

۲۸ـ نشان دهید تابع $\frac{\ln(z-i)}{z^2+i}$ همه‌جا بجز روی نیم‌خط $y=1$ و $x \le 0$ تحلیلی است.

راه حل اول: شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن مشتق‌پذیر بودن است.

$$z = x+iy \Rightarrow z-i = x+i(y-1)$$

$$z^2+i = (x^2-y^2)+i(2xy+1)$$

$$\ln(z-i) = \ln|z-i| + i\tan^{-1}\frac{y-1}{x} = [x^2+(y-1)^2]^{\frac{1}{2}} + i\tan^{-1}\frac{y-1}{x}$$

$$\frac{\ln(z-i)}{z^2+i} = P(x,y) + iq(x,y)$$

حال از شرایط کشی ـ ریمان استفاده می‌کنیم

راه حل دوم: با فرض تحلیلی بودن مشتق می‌گیریم.

$$f(z) = \frac{\ln(z-i)}{z^2+i}, \quad f'(z) = \frac{z^2+i - 2z(z-i)\ln(z-i)}{(z^2+i)^2}$$

نقاطی که $f'(z)$ وجود ندارند:

1) if $y=1$, $x \le 0 \Rightarrow z-i = x+i(y-1) = x$

آنگاه ln منفی خواهد بود پس در این ناحیه $f'(z)$ موجود نیست و تحلیلی نمی‌باشد.

ادامه

۲) حال ریشه‌های مخرج را بررسی می‌کنیم

$$z^2+i = 0 \Rightarrow z^2 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow r=1, \quad \theta = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

z_1 روی مرز مستقیماً واقع است ولی z_2 واقع نیست پس تمامی

$R^2 - \{(x \le 0, y=1)\}$ ...

۲۹- هریک از عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط بنویسید

* حل:

a. $(1+i)^{i} \longrightarrow 1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\longrightarrow \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}} = e^{i\ln\sqrt{2}}\,e^{-\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}\right)$$

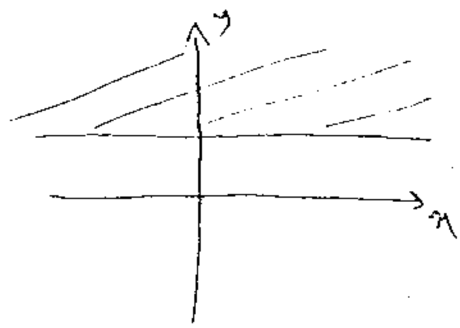
b. $(1-i)^{4i} \longrightarrow 1-i=\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}}$

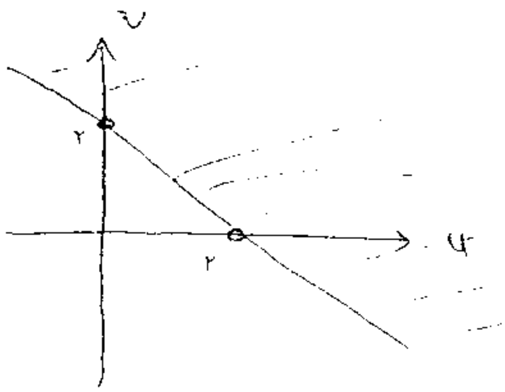
$$(1-i)^{4i} = 4^{i}e^{\pi} = e^{i\ln 4}\,e^{\pi} = e^{\pi}\left(\cos\ln 4 + i\sin\ln 4\right)$$

۳۰- نقش ناحیه $y>1$ را با تبدیل $w=(1-i)z$ بیابید.

$$w=(1-i)(x+iy) = x+y+i(-x+y) \qquad u=x+y,\quad v=-x+y$$

$$\rightarrow y=\frac{u+v}{2} \xrightarrow{y>1} \frac{u+v}{2}>1 \xrightarrow{Y} u+v>2$$





۳۱ـ نقش هذلولی $x^2-y^2=1$ را با تبدیل $w=\frac{1}{z}$ بیابید.

$$f(z)=w=\frac{1}{z}\ \longrightarrow\ z=\frac{1}{w}\ \Rightarrow\ z=\frac{u}{u^2+v^2}-i\,\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$\longrightarrow\ x=\frac{u}{u^2+v^2} \quad \text{و} \quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$x^2-y^2=1\ :\ u^2-v^2=(u^2+v^2)^2$$

۳۲ـ نشان دهید که ترکیب دو تبدیل خطی یک تبدیل خطی است.

* حل: تابع تبدیل هر تبدیل خطی به صورت $w=a_kz+b_k$ است که در آن a_k و b_k ها اعدادی مختلط باشند.

$$\begin{array}{l} w_1=a_1z+b_1 \\ w_2=a_2z+b_2 \end{array}\ \xrightarrow{\text{ترکیب}}\ w=w_1+w_2=(a_1+b_1)z+b_1+b_2=az+b$$

تبدیل خطی

۳٤- تبدیل $w=\cosh z$ را برحسب نگاشتهای زیر بیان کنید.

$Z = e^{z} \quad , \quad W = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z} \right)$

حل:

$$w = \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{z} + \frac{1}{e^{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2} W = \frac{W}{2} \ ;$$

*۱- مطلوب است محاسبه $\int_c f(z)\,dz$ در آن

a) $f(z)=\operatorname{Re} z$ ، C منحنی $y=x^2$ از $z=0$ تا $z=1+i$

*حل:

$$z=x+iy \quad | \qquad f(z)=\operatorname{Re} z = x \;\Rightarrow\; u=x \quad v=0$$

$$y=x^2 \Rightarrow dy=2x\,dx$$

$$\int_c f(z)\,dz=\int_0^1 x\,dx-0\times dy+i\int_0^1 x\,dy+0\times dx=$$

$$\int_0^1 x\,dx+i\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i$$

b) $f(z)=|z|^2$ ، C دایره واحد.

*حل،

$$f(z)=x^2+y^2 \qquad z=e^{i\theta} \quad dz=ie^{i\theta}\,d\theta$$

$$\int_c f(z)\,dz=\int_0^{2\pi} 1\times ie^{i\theta}\,d\theta=i\left[\frac{e^{i\theta}}{i}\right]_0^{2\pi}=\left[\frac{\cancel{e^{2\pi i}}^{\,1}-\cancel{e^{0i}}^{\,1}}{i}\right]i=0$$

c) $f(z)=\cos z$ روی خط راست از $1-i$ تا $1+i$

تابع تحلیلی است پس انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد.

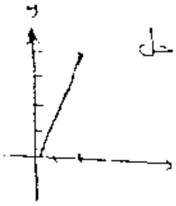
$$\int_{1-i}^{1+i}\cos z\,dz=\left[\sin z\right]_{1-i}^{1+i}=\sin(1+i)-\sin(1-i)$$

$$=\frac{e^{1+i}-e^{-1-i}-e^{1-i}+e^{i-1}}{2i}=\frac{e^{i}(e^{1}+e^{-1})}{2i}-\frac{e^{-i}(e^{1}+e^{-1})}{2i}$$

$$=(e^{-1}+e^{1})\left(\frac{e^{i}-e^{-i}}{2i}\right)=2\cosh(1)\sin(1)$$

d) $f(z)=\operatorname{Im}(z^2)$ از صفر تا $2+4i$ روی پاره‌خط.

حل:



$$f(z)=\operatorname{Im}(z^2)=\operatorname{Im}[x^2-y^2+2xyi]=2xy$$

$u=2xy \qquad v=0 \qquad y=2x$ مسیر انتگرال $\Rightarrow dy=2dx$

$$\int_C f(z)\,dz=\int_0^2 2xy\,dx-0\times dy+i\int_0^2 2xy\,dy+0\times dx$$

$$=\int_0^2 4x^2\,dx+i\int_0^2 8x^2\,dx=\left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^2+i\left[\frac{8}{3}x^3\right]_0^2=\frac{32}{3}+i\frac{64}{3}$$

۲- هرگاه $|f(z)|\leq M$ روی منحنی C به طول L باشد آنگاه $\left|\int_C f(z)\,dz\right|\leq ML$

اثبات:

$$\int_C f(z)\,dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k$$

طول C را به n قسمت مساوی با طول $\frac{L}{n}$ تقسیم می‌کنیم:
$\Delta z_k=\frac{L}{n} \qquad k=1,2,\dots,n$

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k\right|\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|f(z_k)|\,\Delta z_k$$ نامساوی مثلث

$$\Rightarrow\left|\int_C f(z)\,dz\right|\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} M\frac{L}{n}=ML$$

۳- فرض کنید c قوسی از دایره $|z|=2$ از $z=2$ تا $z=2i$ باشد که در ربع اول است آنگاه بدون آنکه انتگرال بگیرید نشان دهید

$$\left|\int_c \frac{dz}{z^2+1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$$

اثبات: $|z|=2 \qquad z=2e^{i\theta} \Rightarrow z^2 = 4e^{2i\theta} \qquad z^2+1 = 4e^{2i\theta}+1$

باید کران $f(z)$ را مشخص کنیم: $\qquad f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+1|} \qquad |z^2+1| = |1+4e^{2i\theta}| = |1+4\cos 2\theta + i4\sin 2\theta|$$

$$= \left[(1+4\cos 2\theta)^2 + (4\sin 2\theta)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[17+8\cos 2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$9 \leqslant [17+8\cos 2\theta] \leqslant 25 \Rightarrow 3 < |z^2+1| < 5 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{|z^2+1|} < \frac{1}{3}$$

با توجه به سؤال قبل - سؤال دوم داریم:

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right| \leqslant ML$$

طول L از $z=2$ تا $z=2i$ محیط ربع دایره یعنی $\frac{\pi}{2}$ است.

$$\Rightarrow \left|\int_c \frac{dz}{z^2+1}\right| = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2}$$

* دوستان لطفاً توجه فرمایید در سؤال فوق جواب پایانی اشتباهاً $\frac{\pi}{3}$ نوشته شده است *

۴ـ هرگاه c دایره‌ی $|z|=R>1$ باشد نشان دهید

$$\left|\oint_c \frac{\ln z}{z^2}\,dz\right| < 2\pi\,\frac{\pi+\ln R}{R}$$

اثبات: مانند سوال قبل داریم:

$$f(z)=\frac{\ln z}{z^2} \qquad z=Re^{i\theta} \qquad |f(z)|=\frac{|\ln z|}{|z^2|}\ ,\ \ln z=\ln R+i\theta$$

$$|f(z)|=\frac{\sqrt{\ln^2 R+\theta^2}}{R^2}$$

$$R>1 \Rightarrow \ln R>0 \Rightarrow \sqrt{\ln^2 R+\theta^2}\leq \theta+\ln R$$

$$|f(z)|\leq\frac{\theta+\ln R}{R^2}\leq\frac{2\pi+\ln R}{R^2}$$

$$\left|\oint_c f(z)\,dz\right|\leq ML=\frac{2\pi+\ln R}{R^2}\times 2\pi R=2\pi\,\frac{2\pi+\ln R}{R}$$

* ادامه‌ی سوال: وقتی $R\to\infty$ آنگاه نشان دهید $\oint_c \frac{\ln z}{z^2}\,dz$ به سمت صفر میل می‌کند.

$$\lim_{R\to\infty}\oint_c \frac{\ln z}{z^2}\,dz=0$$ قضیه‌ی فشردگی در حد.

د- داستان سوال ۵ ندارد.

۶- با نوشتن $\int_a^b dz$ برحسب انتگرال های توابع حقیقی نشان دهید که مقدار انتگرال برابر $b-a$ است.

* اثبات: a و b دو عدد مختلط باشند.

$a = a_1 + a_2 i \qquad b = b_1 + b_2 i$

$dz = dx + i dy$

$$\int_a^b dx + i dy = \int_a^b dx + i \int_a^b dy$$

* باید توجه داشت که a و b مختلط می‌باشند و dx و dy حقیقی‌اند و باید حدود انتگرال را به حالت حقیقی تبدیل کرد.

$$\int_a^b dz = \int_{a_1}^{b_1} dx + i \int_{a_2}^{b_2} dy = b_1 - a_1 + i(b_2 - a_2) = b_1 + ib_2 - (a_1 + ia_2)$$

$$= b - a$$

۷- ...

۸- نشان دهید اگر $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \ ; \ a_n \neq 0$

یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد که $n \geq 1$ آنگاه عدد مثبتی مثل R موجود است به‌طوری‌که به ازای هر z با

$|z| > R$ داریم:
$$|P(z)| > \frac{|a_n||z|^n}{2}$$

اثبات:
$$q(z) = \frac{a_n}{2} z^n$$

فرض می‌کنیم:
$$\nexists R \ni |P(z)| > |q(z)| \Rightarrow |P(z)| < |q(z)| = \frac{a_n}{2} |z|^n$$

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = H(z) + a_n z^n$$

$$\Rightarrow |H(z) + a_n z^n| < \frac{|a_n|}{2} |z|^n$$

$H(z)$ یک چندجمله‌ای است بر طبق قضیه‌ی اساسی جبر داریم:
$$\exists z_1 \in \mathbb{C} \ni H(z_1) = 0$$

$$\text{if } H(z_1) = 0 \Rightarrow |a_n||z|^n < \frac{|a_n|}{2} |z|^n \quad \times$$

که تناقض است پس حتماً R ای وجود دارد.

۹- نشان دهید اگر f در درون و روی منحنی ساده بسته‌ی C تحلیلی باشد و z_0 روی C نباشد، آنگاه:

$$\int_C \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0} = \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$

* اثبات: مطابق قضیه‌ی انتگرال کشی اگر f در z_0 تحلیلی باشد آنگاه مشتق آن نیز در آن نقطه تحلیلی است پس داریم:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

تعریف مشتق را برای تابع تحلیلی $f'(z)$ در $z=z_0$ بکار می‌بریم:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0} \qquad \text{(I)}$$

از طرفی مطابق قضیه‌ی ۴ در صفحه‌ی ۲۰۵

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{(I)},\ \text{(II)} \Rightarrow \oint_C \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0} = \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$

۱۰- فرض کنید f در ناحیه‌ی بسته و کراندار R پیوسته و در داخل R تحلیلی و غیرثابت باشد. با فرض اینکه در همه جا در R، $f(z)\neq 0$:

تابع $\frac{1}{f(z)}$ را در نظر بگیرید و ثابت کنید که $|f(z)|$ جایی در R دارای مقدار مینیمم N است و به ازای هر نقطه داخلی z داریم $|f(z)|>N$

* اثبات: چون $f(z)\neq 0$ آنگاه $\forall z \in R,\ f(z)\neq 0$ ؛ $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ ، $g'(z) = -\frac{f'(z)}{f^2(z)}$

$g(z)$ در تمامی نقاط R تحلیلی است از طرفی چون $f(z)$ غیرثابت است پس $g(z)$ نیز غیرثابت است. چون شرایط قضیه‌ی اصل ماکزیمم برای $g(z)$ برقرار است پس:

$\forall z \in R$

$\exists z_0 \in C_R \ni g(z_0) = \max g(z)$ (C_R مرز R است)

$g(z_0) = M \qquad |g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leq M \Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} \leq M \Rightarrow |f(z)| \geq M = N$

$\forall z \in R : |f(z)| \geq N$

تساوی در رابطه‌ی بالا زمانی رخ می‌دهد که نقطه در مرز حاصل می‌شود ولی به ازای نقاط داخلی R

$|f(z)| > N$

(همان چیزی که در سؤال مطرح شد)

۱۱- فرض کنید f تابع تامی باشد که به ازای هر z داشته باشیم $|f(z)| \leq A|z|$ که در آن A عددی ثابت مثبت است. نشان دهید که یا به ازای هر z، $f(z)=0$ و یا به ازای هر z، $f(z) = a_1 z$ و $a_1 \neq 0$

* اثبات: ابتدا باید نشان دهیم که اگر f و g در ناحیه همبند ساده و کران‌دار D تحلیلی باشند و:

$$\text{if} \quad \forall z : \quad |f(z)| < |g(z)| \quad \text{آنگاه} \Rightarrow |f'(z_0)| < |g'(z_0)|$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$

* (z_0 روی مرز C نیست)

$$|f(z)| < g(z) \Rightarrow \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^2|} < \frac{|g(z)|}{|(z-z_0)^2|} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{|f(z)|\,dz}{|(z-z_0)^2|} \leq \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)\,dz}{|z-z_0|^2}$$

$$f'(z_0) \leq g'(z_0)$$

حالا به سؤال برمی‌گردیم:

$$|f(z)| \leq A|z| = |Az|$$

$$|f'(z)| \leq |A| = A$$

چون f تام است پس f' نیز تام است، از طرفی نشان دادیم که $f'(z)$ کران‌دار است پس شرایط قضیه لیوویل برآورده شد. در نتیجه، نتیجه قضیه نیز حاصل می‌شود یعنی:

$$f'(z) = c$$

$$\text{if} \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = 0$$

$$\text{if} \quad c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = cz = a_1 z \,, \quad a_1 \neq 0$$

* ۱۲- نشان دهید

a) $$\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \quad ; \; |z+1| < 1$$

$z_0 = -1$

شرایط قضیه تیلور را دارد ⇐

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+1)^n$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad c_0 = \frac{f(-1)}{0!} = 1 \qquad c_1 = \frac{f'(-1)}{1!} = 2 \qquad c_2 = \frac{f''(-1)}{2!} = 3 \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$$

b) $$\frac{1}{z^2} = f(z) \qquad |z-2| < 2 \qquad z_0 = 2$$

$$c_0 = \frac{f(2)}{0!} = \frac{1}{4} \qquad c_1 = \frac{f'(2)}{1!} = \frac{\frac{-2}{8}}{1!} = -\frac{1}{4}$$: باز هم شرایط قضیه تیلور را دارا است

$$c_2 = \frac{f''(2)}{2!} = \frac{\frac{6}{2^4}}{2!} = \frac{3}{16} = \quad , \quad c_3 = \frac{f'''(2)}{3!} = \frac{\frac{-24}{2^5}}{3!} = -\frac{4}{32}$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^n} (n+1)$$

c) $$\frac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z(-z+4)} = \frac{1}{z(4-z)} = \frac{1}{4z} \times \frac{1}{1-\frac{z}{4}}$$

با توجه به بسط $\frac{1}{1-z}$ برای $\frac{1}{1-\frac{z}{4}}$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{1-\frac{z}{4}} = 1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{4^2} + \cdots \quad \text{(I)}$$

حال طرفین (I) را در $\frac{1}{4z}$ ضرب کنیم ⇐

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} + \frac{1}{4^2} + \frac{z}{4^3} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$$

۱۴- سری تیلور هریک از توابع زیر را حول نقاط داده شده بدست آورید.

a) $f(z) = \cos z \quad ; \quad z = \frac{\pi}{2}$

$$f(z) = f(\tfrac{\pi}{2}) + f'(\tfrac{\pi}{2})(z-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{2!}(z-\tfrac{\pi}{2})^2 + \dots$$
$$= -(z-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{3!}(z-\tfrac{\pi}{2})^3 - \frac{1}{5!}(z-\tfrac{\pi}{2})^5 + \dots$$

b) $f(z) = \sinh z \quad ; \quad z = \pi i \qquad f'(z) = \cosh z \quad , f''(z) = \sinh z$

$$f(z) = f(\pi i) + f'(\pi i)(z-\pi i) + \frac{f''(\pi i)}{2!}(z-\pi i)^2 + \dots$$
$$= \sinh \pi i + \cosh \pi i\,(z-\pi i) + \frac{\sinh(\pi i)}{2!}(z-\pi i)^2 + \dots$$
$$= i\sin\pi + \cos\pi\,(z-\pi i) + \frac{i\sin\pi}{2!}(z-\pi i)^2 + \dots$$
$$= -(z-\pi i) - \frac{1}{3!}(z-\pi i)^3 - \frac{1}{5!}(z-\pi i)^5 - \dots$$

c) $f(z) = z^5 \quad , z = -1 \qquad f'(z) = 5z^4 \;, f''(z) = 20z^3 \;, f'''(z) = 60z^2, \dots, f^{(5)}(z) =$

$$f(z) = -1 + 5(z+1) - 10(z+1)^2 + \dots + 5!(z+1)^5 + 0 + \dots$$

d) $f(z) = (z+1)^3 \qquad z = 2i \qquad f'(z) = 3(z+1)^2 \;, \dots\, f'''(z) = 6 \;, \forall n \geq 4 : f^{(n)}(z) = 0$

$$f(z) = (1+2i)^3 + 3(1+2i)^2(z-2i) + 3(1+2i)(z-2i)^2 + 6(z-2i)^3 + 0 + 0 + \dots$$

e) $f(z) = \sin z^2 \qquad z = 0$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \Rightarrow \sin z^2 = z^2 - \frac{z}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \dots$$

f) $f(z) = \ln z \quad ; \quad z = 1 \qquad f'(z) = \frac{1}{z} \qquad f^{(n+1)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}} \quad n = 1, 2, \dots$

$$f(z) = f(1) + f'(1)(z-1) + \frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2 + \dots$$
$$= (z-1) - (z-1)^2 + (z-1)^3 - \dots$$

[illegible]

a) $f(z) = e^{z} \sin z$

$$e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum a_n z^n \quad , \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum b_n z^n$$

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

if $\forall z : |z| < R \; : \; \sum a_n z^n \longrightarrow$ همگرا

$\forall z : |z| < R \; : \; \sum b_n z^n \longrightarrow$ همگرا

[illegible]

$$\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum c_n z^n \quad , \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

$$\Rightarrow c_0 = a_0 b_0 \quad , \quad c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 \quad , \quad c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 , \ldots$$

$$f(z) = z + z^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) z^3 + \cdots$$

b) $f(z) = z \cot z \qquad g(z) = \cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots}$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \quad \Big| \quad z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

$$\frac{1}{z} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z + \alpha z^3 + \cdots$$

$$-\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\right) \cdots$$

$$\left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) z^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) z^4 + \cdots$$

$$-\left[\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z^4 + \cdots\right]$$

$$\underbrace{\left[\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right)\right]}_{\alpha} z^4 + \cdots$$

$$\cot z = \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z + \alpha z^3 + \cdots$$

$$z \cot z = 1 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z^2 + \alpha z^4$$

c) $f(z) = z \sin z^2$

الهام از مثال ۱۵ مورد d:

$$\sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + - \cdots \qquad \text{و } z = 0 + 1z + 0z^2 + 0z^3 + \cdots$$

مطابق قضیه‌ی ضرب سری‌ها که در مورد a توضیح داده شده داریم:

$$f(z) = z^3 - \frac{z^7}{3!} + \frac{z^{11}}{5!} - \cdots$$

※ ۱۶- هر یک از توابع زیر را حول مبدأ مختصات به صورت سری لوران بسط دهید.

a) $\frac{e^{2z}}{z^3}$: $e^{2z} = 1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \cdots$

$$\Rightarrow \frac{e^{2z}}{z^3} = z^{-3} + 2z^{-2} + 2z^{-1} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3}z + \cdots$$

b) $$z \cos\frac{1}{z} = z\left(1 - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \cdots\right)$$

$$= z - \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{4!\,z^3} - \frac{1}{6!\,z^5} + \cdots$$

c) $$\frac{\sinh \pi z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(\pi z + \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} + \cdots\right) = z^{-2}\pi + \frac{\pi}{3!} + \frac{\pi}{5!}z^2 + \cdots$$

d) $$\frac{1}{z^2 + z^4} = \frac{1}{z^2(1+z^2)} = \frac{1}{z^2}\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots\right) \rightarrow |z| < 1.$$

$$= z^{-2} - 1 + z^2 - z^4 + \cdots \qquad |z| < 1$$

توجه شود سری داده شده در ناحیه‌ی همگرایی آنها در نظر گرفته شود

e) $$\frac{z-1}{z^2 - z^4} = \frac{-(z-1)}{z^2(z-1)(1+z)} = \frac{-1}{z^2(1+z)} = \frac{-1}{z^2}\left(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots\right)$$

f) $$z^3 \cosh\frac{1}{z} = z^3\left(1 + \frac{(\frac{1}{z})^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{z})^4}{4!} + \cdots\right) = z^3 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{4!}z^{-1} + \cdots$$

۱۷ـ بسط لوران هریک از توابع زیر را در نقاط داده شده بدست آورید.

a) $\frac{e^z}{(z-1)^2}$; $z_0=1$

ابتدا سری تیلور e^z را حول $z_0=1$ داریم:

$$e^z = 1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^3}{3!}+\dots$$

$$f(z)=(z-1)^{-2}e^z=(z-1)^{-2}+(z-1)^{-1}+\frac{1}{2!}(z-1)^0+\frac{(z-1)}{3!}+\dots$$

b) $\frac{1}{z^2+1}$; $z_0=i$

$$\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}=\frac{P(z)}{z-i}\quad,\ P(z)=\frac{1}{z+i}\quad,\ P^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n n!}{(z+i)^{n+1}}$$

$$\frac{P^{(n)}(i)}{n!}=\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}\Rightarrow P(z)=\frac{1}{2i}+\frac{(z-i)}{2^2\times 1}+\frac{(z-i)^2}{2^3 i^3}+\frac{(z-i)^3}{2^4\times 1}+\dots$$

$$\Rightarrow P(z)=-\frac{i}{2}+\frac{(z-i)}{4}+\frac{i}{8}(z-i)^2+\frac{1}{16}(z-i)^4+\dots$$

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{P(z)}{z-i}=-\frac{i}{2}(z-i)^{-1}+\frac{1}{4}+\frac{i}{8}(z-i)+\frac{1}{16}(z-i)^2+\dots$$

c) $\frac{z+i+1}{(z+i)^2}$; $z_0=-i$

$P(z)=z+1+i$ چون $P(z)$ چندجمله‌ای است پس سری تیلورش با خودش یکی است.

$$P(z)=1+(z+i)+0(z+i)^2+\dots$$

$$(z+i)^{-2}P(z)=(z+i)^{-2}+(z+i)^{-1}+0+0+0+\dots$$

d) $\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}$; $z_0=\frac{\pi}{2}$

$$P(z)=\sin z=(z-\tfrac{\pi}{2})-\frac{(z-\frac{\pi}{2})^3}{3!}+\frac{(z-\frac{\pi}{2})^5}{5!}\dots$$

$$f(z)=(z-\tfrac{\pi}{2})^{-3}P(z)=(z-\tfrac{\pi}{2})^{-2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}(z-\tfrac{\pi}{2})^2+\dots$$

* ۱۸- با مشتق‌گیری از سری مکلورن $\frac{1}{1-z}$ نشان دهید

a) $$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+z^4+\dots \qquad (I)$$

$$\left(\frac{1}{(1-z)}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

مشتق دست راست رابطه‌ی (I) $\leftarrow$ $1+2z+3z^2+4z^3+\dots$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

b) $$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$$

لازم است از طرفین رابطه‌ی قبل مشتق بگیریم: $\frac{1}{(1-z)^2} = 1+2z+3z^2+4z^3+\dots$

۱۹- با انتگرال‌گیری از سری مکلورن $\frac{1}{1+s}$ در امتداد مرزی از $s=0$ تا $s=z$ در داخل دایره‌ی همگرایی نشان دهید

$$\ln(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \; ; \quad |z|<1$$

$$\frac{1}{1+s} = 1-s+s^2-s^3+\dots \qquad |s|<1$$

$$\int_0^z \frac{ds}{1+s} = \int_0^z (1-s+s^2-s^3+\dots)\, ds$$

توجه: * از هر سری درون دایره‌ی همگرایی‌اش می‌توان - آن را جمله به جمله انتگرال یا مشتق گرفت *

$$\ln(1+s)\Big]_0^z = s-\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{4}+\dots\Big]_0^z$$

$$\ln(1+z) = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}, \quad |z|<1$$

۲۰- ثابت کنید هرگاه $f(0)=1$ و برای $z\neq 0$، $f(z)=z^{-1}\ln(z+1)$ آنگاه f در سراسر حوزه $|z|<1$ تحلیلی است.

اثبات: تابع $\ln(z+1)$ یک تابع تحلیلی در $|z|<1$ است پس داریم:

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\dots\quad ;\quad |z|<1$$

$$f(z)=z^{-1}\ln(1+z)=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\dots+\frac{(-1)^n z^n}{n+1}+\dots$$

چون از دستور پیدا کردن شعاع همگرایی استفاده می‌کنیم:

$$a=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\ ,\quad a_n=\frac{(-1)^n z^n}{n+1}$$

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{\sqrt[n]{n}}=\frac{|z|}{1}<1\Rightarrow |z|<1$$

از طرفی چون توانستیم f را به صورت یک سری توانی با شعاع همگرایی معلوم بنویسیم و چون می‌دانیم یک سری توانی تحلیلی است پس $f(z)$ در $|z|<1$ تحلیلی است.

۲۱- ثابت کنید اگر f در z_0 تحلیلی باشد و $f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(m)}(z_0)=0$ آنگاه تابع

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(z-z_0)^{m+1}}f(z) & ;\ z\neq z_0\\[2ex] \dfrac{1}{(m+1)}f^{(m+1)}(z_0) & ;\ z=z_0\end{cases}$$

در z_0 تحلیلی است.

* اثبات: f در z_0 تحلیلی است پس داریم:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\dots+\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m+\dots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\dots$$

$$f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(m)}(z_0)=0$$

$$f(z)=\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+\frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^{m+2}+\dots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\dots$$

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}=\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}+\frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m-1}+\dots$$

این تابع در نقاط مخالف z_0 با $g(z)$ برابر است. همچنین در $z=z_0$ پیوسته است. چون $g(z)$ از تقسیم دو تابع تحلیلی حاصل شده است سری توانی و در نتیجه تحلیلی است.

* ۱۲- مطلوب است محاسبه‌ی مانده هریک از توابع زیر در نقاط تکین آنها:

a) $\dfrac{1}{1-e^z}$ $\qquad z = 0\ ,\ 2\pi i,\ 4\pi i,\ 6\pi i,\ \ldots$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{1-e^z} = \lim_{z\to 0} (z)\frac{1}{1-e^z} \overset{hop}{=\!=} \lim \frac{1}{-e^z} = -1$$

* برای تعیین نقاط تکین بقیه می‌توان مقادیر مانده‌ها را حساب نمود.

b) $\dfrac{z}{z^4-1} = \dfrac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)}$ $\qquad z = \pm i\ ,\ \pm 1$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \cancel{(z-1)}\frac{z}{\cancel{(z-1)}(z+1)(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to 1} \frac{z}{(z+1)(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$$

برای تعیین نقاط هم به همین ترتیب عمل کنید.

c) $\dfrac{4-4z}{z^2(z+2)}$ $\qquad z = 0, 0\ ,\ z = -2$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left[f(z)\right] = \lim_{z\to 0} \frac{d\left(\dfrac{4-4z}{z^2(z+2)}\, z^2\right)}{dz} = -2$$

* برای $z=-2$ به صورت مثال قبل مورد b عمل کنید.

d) $\dfrac{1}{(z^4-1)^2}$ $\qquad z^4 = 1 \qquad z = \pm 1$ و $\pm i$

تمام ریشه‌ها دو بار تکراری می‌شوند

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left[f(z)\right] = \lim \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-1)^2}\frac{1}{\cancel{(z-1)^2}(z+1)^2(z-i)^2(z+i)^2}\right) = \ldots$$

* برای تعیین بقیه ریشه‌ها نیز به صورت فوق عمل کنید.

e) $\dfrac{z+2}{(z+1)(z-4i)(z+4i)}$ $\qquad z = -1\ ,\ 4i,\ -4i$ نقاط تکین اند.

* باز هم مشابه مورد b عمل کنید

f) $\dfrac{-z^2+8-22z}{z(z-1)(z-4)}$ $\qquad z = 0\ ,\ 1,\ +4$

* مشابه مورد b

۲۳. مطلوب است محاسبه‌ی مقدار انتگرال‌های زیر:

a) $\oint\limits_{|z|=1} z\cot z \, dz = 0$

چون طبق جواب سؤال حل شده‌ها مشخص شد $z\cot z$ تحلیلی است.

b) $\oint\limits_{|z|=1} \tan z \, dz = 0$ تحلیلی است

c) $\oint \dfrac{\sin \pi z}{z^3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z) = 2\pi i \, C_{-1}$

$\sin \pi z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dots \qquad \dfrac{\sin \pi z}{z^3} = z^{-2} - \dfrac{z^{-1}}{3!} + \dfrac{z}{5!} - \dots \Rightarrow C_{-1} = -\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=1} f(z) = 2\pi i \cdot \dfrac{-1}{6} = \dfrac{-\pi i}{3}$;

d) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z+1}{z^3 - 2z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z)$

$z=0$ قطب مرتبه سوم است پس:

$C_{-1} = \operatorname{Res}\limits_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{(3-1)!} \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{d^2}{dz^2} z^3 f(z)$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{d^2}{dz^2}\left(\dfrac{z+1}{z-2}\right) = \dfrac{1}{2} \lim \dfrac{6}{(z-2)^3} = -\dfrac{3}{8}$

$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \dfrac{-3}{8} = -\dfrac{3\pi i}{4}$;

e) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^4+5z^3+6z^2} = 2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)$

$z^4+6z^3+5z^2 = z^2(z^2+5z+6) = z^2(z+2)(z+3) = 0$

$z=0$ درون ناحیه است.

$c_{-1} = \lim \frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{1}{z^2(z+2)(z+3)}\right) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+5z+6}\right)$

$= \lim\limits_{z\to 0} \frac{-2z+5}{(z^2+5z+6)^2} = \frac{5}{36}$

$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \frac{5}{36} = \frac{5\pi i}{18}$;

f) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z^2-4z+1}{(z-2)(1+4z^2)}\,dz$

$1+4z^2=0 \Rightarrow z^2 = i^2\frac{1}{4} \quad z = \pm\frac{i}{2}$;

$\oint f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}\limits_{z=-\frac{i}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}\limits_{z=\frac{i}{2}} f(z)\right]$

$\operatorname*{Res}\limits_{z=\frac{i}{2}} f(z) = \lim\limits_{z\to\frac{i}{2}} \left(z-\frac{i}{2}\right) \frac{6z^2-4z-1}{4(z-2)(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})} = \frac{-\frac{3}{2}-2i+1}{4i(-2+\frac{i}{2})} = \alpha$

$\operatorname*{Res}\limits_{z=-\frac{i}{2}} f(z) = \lim \left(z+\frac{i}{2}\right) \frac{6z^2-4z-1}{4(z-2)(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})} = \frac{1+2i-\frac{3}{2}}{4i(2+\frac{i}{2})} = \beta$

$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i(\alpha+\beta)$

g) $\oint_{|z|=1} \frac{z^2-3z+1}{(2z+1)(z^2+4)} = \oint_C \frac{f(z)}{2z+1}dz = \frac{1}{2}\oint_C \frac{f(z)}{z+1/2}dz = \frac{1}{2}2\pi i \lim_{z\to -1/2} f(z) =$

$= \pi i \lim \frac{z^2-3z+1}{z^2+4} = \pi i \cdot \frac{1/4+3/2+1}{4+1/4} = 11\pi i/17$

h) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{(z-i)\pi/2}}{\sin z}dz = \oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^{(z-i)\pi/2}}{\cos z}$

$= 2\pi i \cdot \frac{e^{-i\pi/2}}{1} = -2\pi i$

* اگر $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ ، $p(z_0)\neq 0$, $q(z_0)=0$ آنگاه :

$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)p(z)}{q(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{\frac{q(z)-0}{z-z_0}}$

$= \lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(z_0)}{z-z_0}} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

i) $\oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^2-2iz}dz = \oint_C \frac{(\cosh z)/(z-2i)}{z}dz = \oint_C \frac{f(z)}{z}dz$

$= 2\pi i \lim z\cdot\frac{f(z)}{z} = 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{\cosh z}{z-2i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{-2i} = \frac{-2\pi}{2}$

j) $\oint_{|z|=1} \frac{20z^2-24z+5}{(2z-1)^2(3z-1)}dz = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=1/2} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1/3} f(z)\right]$

$\operatorname*{Res}_{z=1/2} f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{4}\frac{d}{dz}(z-1/2)^2 \cdot \frac{20z^2-24z+5}{(3z-1)(z-\frac{1}{2})^2} =$

$\frac{1}{4}\lim\frac{d}{dz}\frac{20z^2-24z+5}{3z-1} = \frac{1}{4}\lim_{z\to 1/2} p(z)\Big| = \frac{1}{4}p(\frac{1}{2})$

$\operatorname*{Res}_{z=1/3} f(z) = \frac{1}{3}\lim_{z\to 1/3}\frac{20z^2-24z+5}{(2z-1)^2} = 1/3 \lim_{z\to 1/3} q(z) = 1/3\, q(1/3)$

$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\left[\frac{1}{4}p(1/2) + 1/3\, q(1/3)\right]$

k) $\oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z(z^2+1)}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{\cosh z}{1+z^2} = 2\pi i$

L) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2}\cosh z}{\cos z/2}dz = 0$

m) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{-z^2-22z+8}{z^3-5z^2+4z}$ — ... $= z(z-1)(z-4)=0$

$$I = \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)\right]$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{-z^2-22z+8}{3z^2-10z+4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{-z^2-22z+8}{3z^2-10z+4} = \frac{-1-22+8}{-3} = 5 \qquad I = 14\pi i$$

---

۲۴) مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال های زیر

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \qquad d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$I = \oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(2+\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)} = \oint\frac{2\,dz}{4iz+iz^2+i}$$

$$z_1 = \frac{-4i+i\sqrt{12}}{2i} \qquad z_2 = \frac{-4i-i\sqrt{12}}{}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{12}-4}{2} = \sqrt{3}-2 \qquad z_2 = -2-\sqrt{3}$$

در داخل دایره قرار دارد — در داخل دایره قرار ندارد

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}\right] = 2\pi i\lim_{z\to\sqrt{3}-2}\frac{1}{z+2+\sqrt{3}} = 2\pi i\times\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

---

b) $\displaystyle = \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\frac{1}{3}\cos\theta} = \oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{1+\frac{z^2+1}{6z}} = -6i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6z+1}$

$$= (-6i)(2\pi i)\operatorname*{Res}_{z=-3+2\sqrt{2}} f(z) = 12\pi\lim_{z\to -3+2\sqrt{2}}\frac{1}{2z+6} = 12\pi\,\alpha$$

page 5

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{17-8\cos x}\,dx \Rightarrow \quad I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}(z+z^{-1})}{17-\frac{8}{2}(z+\frac{1}{z})}\,\frac{dz}{iz}$

$= \oint \frac{\frac{1}{2}(z^2+1)}{iz(17z-4z^2-4)}\,dz \qquad z=0$

$z_1 = \frac{-17+\sqrt{15}}{-8} = 1.64 \qquad z_2 = \frac{-17-\sqrt{15}}{-8} = 2.6$

$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}[f(z)] = 2\pi i \lim \frac{\frac{1}{2}(z^2+1)}{17z-4z^2-4} \times \frac{1}{i} = \frac{\frac{1}{2}}{-4} \times \frac{1}{i}$

$\times 2\pi i = \pi/4$

---

d) $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{13-12\times\frac{1}{2}(z^2+\frac{1}{z^2})} \times \frac{dz}{iz}$

$\oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{2z^2(13-6z^2-\frac{6}{z^2})} \times \frac{dz}{i} \qquad z=0$ قطب مضاعف

$\oint \frac{z^4+z^2}{i2z^2(13z^2-6z^4-6)} = \oint \frac{z^4+z^2}{i2(13z^2-6z^4-6)z^2}\,dz$

$z^2 = 1.5 \qquad z = \pm\sqrt{1.5} \qquad z^2 = 2/3 \qquad z = \pm\sqrt{2/3}$

$I = \oint \frac{z^4+z^2}{2z^2 i(z-\sqrt{1.5})(z+\sqrt{1.5})(z-\sqrt{2/3})(z+\sqrt{2/3})}\,dz =$

$2\pi i \sum \operatorname{Res}[f(z)]$

$z = \sqrt{1.5},\ -\sqrt{1.5},\ -\sqrt{\frac{2}{3}},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ 0$

---

e) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\cos\theta}\,d\theta$

$$\int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{3+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{iz\left(z^2+6z+1\right)} dz$$

$z_1 = 0$ داخل دایره است $z_2 = -0.258$ داخل دایره است $z_3 = -3.91$ بیرون دایره

$$I = 2\pi i \sum_{z=0,\,-0.258} \mathrm{Res}\left[F(z)\right]$$

---

f) $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos 2\theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{4i^2}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2}{5-4\left[\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right]} \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint \frac{-\frac{1}{4}\left(z^2-2+\frac{1}{z^2}\right)}{5z-2z^3-\frac{2}{z}} = \oint \frac{-\frac{1}{4}\left(z^4-2z^2+1\right)}{\left(5z^3-2z^5-2z\right)} \frac{dz}{i}$$

$$= \oint \frac{-1/4\left(z^2-1\right)^2}{z\left(5z^2-2z^4-2\right)} \frac{dz}{i}$$

$$I = 2\pi i \left[\lim_{z\to 1/2} \frac{-1/4\left(z^2-1\right)^2}{z(z-2)} + \lim_{z\to 2} \frac{-1/4\left(z^2-1\right)^2}{z\left(z-1/2\right)} + \lim_{z\to 0} \frac{-1/4\left(z^2-1\right)^2}{\left(z-1/2\right)(z-2)}\right.$$

---

g) $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta} d\theta = \oint \frac{1/4\left(z+1/z\right)^2}{26-10\left(1/2\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right)} \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint \frac{1/4\left(z^2+1\right)^2 dz}{i\left(26z^3-5z^5-5z\right)} = \oint \frac{1/4\left(z^2+1\right)^2}{iz\left(26z^2-5z^4-5\right)} dz$$

$$z^2 = \frac{-26 \pm 24}{-10} \begin{cases} 5 \\ 0.2 \end{cases}$$

$z_5 = 0$ $z_4 = \sqrt{0.2}$ $z_3 = -\sqrt{0.2}$ $z_2 = -\sqrt{5}$ $z_1 = \sqrt{5}$

h) $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\theta}{5 - 4\cos^2\theta}\, d\theta$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{4}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2}{\left(5 - 4 \times \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\right)} \frac{dz}{iz} = \oint \frac{\frac{1}{4}(z^4+1)^2}{z^7\left(5 - 2z^2 - \frac{2}{z^2}\right)} \frac{dz}{i}$$

$$= \oint \frac{1}{4z^5 i} \cdot \frac{(z^4+1)^2}{(5z^2 - 2z^4 - 2)}\, dz \qquad z=0 \quad z_1 = 0 \quad z^2 = 2 \quad z^2 = 1/2$$

$z_2 = -\sqrt{2} \qquad z_3 = \sqrt{2} \qquad z_4 = -\sqrt{1/2} \qquad z_5 = \sqrt{1/2}$

$$I = 2\pi i \left[\lim_{z \to -\sqrt{2}} \frac{(z^4+1)^2}{4z^5 i (z-\sqrt{2})(z+\sqrt{1/2})(z-\sqrt{1/2})} + \lim z^4 + 1 \ \ldots \right.$$

---

j) $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{4 + \frac{4}{3}\sin 2\theta}\, d\theta \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$\sin 2\theta = \frac{1}{2i}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) \qquad d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{4 + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2i}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)} \frac{dz}{iz} = \oint \frac{\frac{1}{2}(z^2+1)}{i\left(4z^2 + \frac{2}{3i} z^4 - \frac{2}{3i}\right)}\, dz$$

$$= \oint \frac{3/2\,(z^2+1)}{2z^4 + 12 i z^2 - 2} \qquad z^2 = \frac{-12i \pm 11{,}31i}{4}$$

$z^2 = -2{,}83i \qquad z^2 = -0{,}17i$

۲۵) نشان دهید که

a) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}=\pi\sqrt{2}$ $\qquad 1+\sin^2\theta=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$=\frac{3+3\tan^2\theta-1+\tan^2\theta}{2(1+\tan^2\theta)}=\frac{2+4\tan^2\theta}{2(1+\tan^2\theta)}=\frac{1+2\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{1+(\sqrt{2}\tan\theta)^2}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{1+2u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}u+C$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\theta\tan\theta+C=\frac{\theta}{\sqrt{2}}\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}=\pi\sqrt{2}$$

---

b) $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}=\frac{2\pi}{\sqrt{(1-a^2)}}$ $\qquad -1<a<1$

$2\cos x=z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}$ $\qquad z=e^{i\theta}$ $\qquad dz=ie^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta$

$d\theta=\frac{dz}{iz}$ $\quad\Rightarrow\quad \oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{az^2+2z+a}{2z}}=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{az^2+2z+a}$

$az^2+2z+a=0$ $\quad\Rightarrow\quad z=\frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$

$$\oint_{|z|=1}f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\,f(z)$$

$$z=\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}=z_0$$

$$\mathrm{Res}_{z=z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{2az+2}=\frac{1}{2-2+2\sqrt{1-a^2}}$$

$$\int\frac{d\theta}{1+a\cos\theta}=\frac{2}{i}\times 2\pi i\times\frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

---

c) $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\frac{\pi a}{(a^2-1)^2}$ $\quad ;\ a>1$

$\cos\theta=\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}=\frac{z^2+1}{2z}$ $\qquad a+\cos\theta=a+\frac{z^2+1}{2z}=\frac{z^2+2az+1}{2z}$

$$\int_0^{\pi}f(\theta)\,d\theta=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(z^2+2az+1)^2}=\Big(\frac{4}{i}\sum_{|z|=1}\mathrm{Res}\,f(z)\Big)2\pi i=8\pi\,\mathrm{Res}_{z=z_0}f(z)$$

$z^2+2az+1=0$ $\quad\Rightarrow\quad z=-2a\pm\sqrt{4a^2-4}$ $\qquad z=-2a\pm 2\sqrt{a^2-1}$

۱۳۰ ج ۵

تمرین $z_0 = -2a + 2\sqrt{a^2-1}$ در داخل ناحیه $|z|=1$ قرار دارد

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{d} (z-z_0)^2 f(z)$$

با ضرب دو طرف در ۲ نتیجه می‌گیریم که: $\int_0^{\pi} f(\theta)d\theta = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}$

---

d) $\int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta \, d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi \quad ; \; n=1,2,\dots$

$(\sin^2\theta)^n \Rightarrow \sin\theta = \left(\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(z^2+\frac{1}{z^2}-2\right) = \frac{-z^4+1+2z^2}{4z^2}$

$d\theta = \frac{dz}{iz} \qquad \frac{(-z^4+2z^2+1)^n}{4z^{2n}}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{4i}\cdot\frac{(-z^4+2z^2+1)^n}{z^{2n+1}}$

$$\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1} \frac{(-z^4+2z^2+1)^n}{z^{2n+1}}dz = \frac{1}{4i}\cdot 2\pi i \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} z^{2n+1}\cdot\frac{(-z^4+2z^2+1)^n}{z^{2n+1}}$$

$$\frac{\pi}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\cdot(-z^4+2z^2+1) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{z}{\pi}$$

---

* ۳۴) مطلوبست محاسبه هر یک از انتگرالهای زیر

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = I \qquad I = 2\pi i\sum \operatorname{Res} f(z), \quad f(z) = \frac{1}{1+z^4}$

$z^4+1=0 \quad z^4 = e^{i\pi} \Rightarrow z = e^{i\frac{2k\pi+\pi}{4}} \; (\operatorname{Im} z)>0$

$z_1 = e^{i\pi/4}, \quad z_2 = e^{i\pi/2} = i, \quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$

این سه جواب قابل قبول هستند سه جواب در ناحیه $\operatorname{Im}(z)>0$ واقع اند.

$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{z^5} = \qquad \frac{1}{4z_1^5} = \alpha$ حالا این شد

$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2}\frac{1}{4z^5} = \beta \qquad \operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z) = \frac{1}{4z_3^5} = \gamma$

$I = 2\pi i(\alpha+\beta+\gamma)$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res} f(z)$

$f(z) = \dfrac{z}{(z^2-2z+2)^2}$ $\qquad z^2-2z+2=0 \Rightarrow z = 1 \pm i$

$(z^2-2z+2)^2 = (z-1-i)^2(z-1+i)^2$ نقطه $z=1+i$ در $\operatorname{Im}(z)>0$ قرار دارد

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1+i} f(z)$ $\qquad \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z\to 1+i} \frac{d}{dz}(z-1-i)^2 \cdot \frac{z}{(z-1-i)^2(z-1+i)^2}$

$= \displaystyle\lim_{z\to 1+i} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1+i)^2} = \lim \frac{(z-1+i)-2z}{(z-1+i)^3} = \alpha$ $\qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\alpha$

---

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res} f(z)$

$f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2} = \dfrac{1}{((z-i)(z+i))^2} = \dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$

$z=i$ قابل قبول: یک قطب مرتبه دوم است.

$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \pi i \lim \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2} = -\pi i \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)^3}$

$= -\pi i \cdot \dfrac{1}{8i^3} = \pi/8$

---

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res} f(z)$ $\qquad z^2+1=0 \quad z=\pm i$

$z^2+9=0 \quad z = \pm 3i$

$\Rightarrow z_0 = i,\ z_1 = 3i$ $\qquad \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim \dfrac{1}{(z+i)(z^2+9)}$

[illegible]

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) = \lim_{z\to 3i} \frac{1}{(z^2+1)(z+3i)} = \beta \qquad I = 2\pi i(\alpha+\beta)$$

---

e) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} \Rightarrow 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res} f(z)$$

$$(z^2+1)(z^2+4)^2 = (z-i)(z+i)(z-2i)^2(z+2i)^2 \quad z_0 = i,\ z_1 = 2i$$ قطب ساده ، قطب مرتبه دوم

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim \frac{1}{(z+i)(z^2+4)^2} = \alpha$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)^2} = \beta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i(\alpha+\beta)$$

---

f) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res} f(z)$$

$$f(z) = \frac{1+z^2}{1+z^4}, \qquad 1+z^4 = 0 \Rightarrow z = e^{-i\frac{2k\pi+\pi}{4}},\ k=0,1,2,\dots,5$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_1 = i, \quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1+z^2}{4z^5} = \frac{1+e^{i\pi/2}}{4e^{5\pi/4}} = \alpha$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim \frac{1+z^2}{4z^5} = \frac{1+i^2}{4i^5} = 0 \qquad \operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z) = \lim_{z\to z_3} \frac{1+z^2}{4z^5} = \beta$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i(\alpha+0+\beta)$$

---

g) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \left[2\pi i \operatorname*{Res}_{\operatorname{Im}(z)>0} f(z)e^{iz}\right]$$

$$\int_C f(z)e^{iz}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx \Rightarrow$$

$$\int_C f(z)e^{iz}\,dz = 2\pi i \sum_{Im(z)>0} \operatorname{Res} f(z)e^{iz} = 2\pi i \sum_{Im(z)>0} \operatorname{Res} g(z)$$

$$g(z) = \frac{z e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)} \quad , \quad z=\pm i \quad , \quad z=\pm 2i$$

$$\operatorname{Res}_{z=i} g(z) = \lim_{z\to i} \frac{z e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)} = \alpha \quad , \quad \operatorname{Res}_{z=2i} g(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{z e^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)} = \beta$$

$$\int_C f(z)e^{iz}\,dz = 2\pi i(\alpha+\beta) \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x \, dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = Im\left(2\pi i(\alpha+\beta)\right)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x+a)^2+b^2} = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx = \int_{\substack{C \\ \mathrm{Im}(z)>0}} f(z)\, e^{iz}\, dz \Rightarrow \int \frac{e^{iz}\, dz}{(z+a)^2+b^2} = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}\; g(z)$$

* جواب: $(z+a)^2+b^2$ دارای دو ریشه است. $z_1 = -a-ib$ و $z_2 = -a+ib$

که هیچ‌کدام در $\mathrm{Im}(z)>0$ نیستند پس آنگاه $f(z)$ در $\mathrm{Im}(z)>0$ تحلیلی است.

$$\int_{\mathrm{Im}(z)>0} f(z)\, e^{iz}\, dz = 0 \quad \Rightarrow \text{ازآن} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x+a)^2+b^2} = 0$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+9)^2} = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+9)^2}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx = \int_{\mathrm{Im}(z)>0} f(z)\, e^{iz}\, dz$$

$$\int \frac{e^{iz}}{(z^2+9)^2}\, dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}\; g(z)$$

$$z^2+9 = 0 \Rightarrow z = \pm 3i \Rightarrow z_0 = 3i$$

$$\mathrm{Res}_{z=3i}\; g(z) = \lim_{z \to 3i} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z+3i)^2}\right) = \text{باید از عبارت بدون پرانتز مشتق بگیریم و} = \alpha$$

به‌جای z، $3i$ قرار دهیم

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+9)^2} = \mathrm{Re}\left[2\pi i \alpha\right]$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^4 + 13x^2 + 36} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 13x^2 + 36}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx = \int_{\operatorname{Im}(z)>0} f(z)\, e^{iz}\, dz$$

$$\int f(z)\, e^{iz}\, dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}\, g(z)$$

$$z^4 + 13z^2 + 36 = 0 \implies z^2 = 4i^2 ,\ 9i^2 \implies z = \pm 2i ,\ \pm 3i$$

$$z_0 = 2i ,\ z_1 = 3i$$

$$\operatorname{Res}_{z=2i} g(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{1}{4z^3 + 26z} = \alpha$$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x \, dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i (\alpha + \beta)\right]$$

$$\operatorname{Res}_{z=3i} g(z) = \lim_{z \to 3i} \frac{1}{4z^3 + 26z} = \beta$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^4 + 1} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx = \int_{\operatorname{Im}(z)>0} f(z)\, e^{iz}\, dz = \int \frac{e^{iz}}{z^4+1}\, dz$$

$$z^4 + 1 = 0 \qquad z = e^{i\left(\frac{2k\pi + \pi}{4}\right)} \qquad z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} ,\ z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

z_2 و z_3 قابل قبول نیستند

$$\int f(z)\, e^{iz}\, dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}\, g(z) \ \ldots$$

$$\left\{ \operatorname{Res}_{z=z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{e^{iz}}{4z^3} = \alpha ,\ \operatorname{Res}_{z=z_1} g(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{e^{iz}}{4z^3} = \beta \right\} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x \, dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i (\alpha + \beta)\right]$$

$$L=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{4x^4+13x^2+9}\,dx=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i2x}\,dx=I$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i2x}\,dx=\int_{Im(z)>0}f(z)\,e^{i2z}\,dz=\int_{Im(z)>0}g(z)\,dz$$

$$4z^4+13z^2+9=0\ \Rightarrow\ z^2=-\frac{13}{2}\pm\frac{5}{2}i=2e^{\pm i\theta}$$

$$z^2=2e^{i\theta}\ \Rightarrow\ z_0=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}\ ,\ z_1=\sqrt{2}\,e^{i2\theta/2}$$

$$z^2=2e^{-i\theta}\ \Rightarrow\ z_2=\sqrt{2}\,e^{-i\theta/2}\ ,\ z_3=\sqrt{2}\,e^{-i2\frac{\theta}{2}}$$

تنها z_0 , z_1 داخل مرزند.

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname*{Res}_{z=z_0}g(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{16z^3+26z}=\alpha\\[2ex]&\operatorname*{Res}_{z=z_1}(g(z))=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{16z^3+26z}=\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ I=\operatorname{Re}\left[2\pi i\,(\alpha+\beta)\right]$$

$$m=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i4x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i4x}\,dx=\int_{Im(z)>0}f(z)\,e^{i4z}\,dz=\int_{Im(z)>0}g(z)\,dz$$

$$(z^2+1)(z^2+4)=0\ \Rightarrow\ \begin{matrix}z_0=i\\ z_1=2i\end{matrix}$$ داخل مرزند

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname*{Res}_{z=2i}g(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{e^{i4z}}{(z^2+1)(z+2i)}=\beta\\[2ex]&\operatorname*{Res}_{z=i}g(z)=\lim_{z\to i}\frac{e^{i4z}}{(z+i)(z^2+4)}=\alpha\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos 4x\,dx=\operatorname{Re}\left[2\pi i\,(\alpha+\beta)\right]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,dx = Im \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2x}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2x}\, dx = \int_{Im(z)>0} f(z)\, e^{i2z}\, dz = \int_{Im(z)>0} g(z)\, dz = 2\pi i \sum_{Im(z)>0} Res\, g(z)$$

$$z^2+z+1=0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} i$$

هیچ‌کدام از دو ریشه در ناحیه‌ی $Im(z)>0$ قرار ندارند پس تابع $\frac{e^{i2z}}{z^2+z+1}$ در ناحیه‌ی $Im(z)>0$ تحلیلی است در نتیجه طبق قضیه‌ی انتگرال کوشی انتگرال آن در این ناحیه صفر است

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2x\, dx = 0$$