

باسمه تعالی

برنامه ریزی آرمانی

Goal Programming

تهیه و تنظیم:

دکتر موسایی

اصول مدل سازی در برنامه ریزی آرمانی خطی تفاوت معنی داری با رویه مدل سازی برنامه ریزی خطی ندارد. تفاوت اساسی در اینجا مربوط به توضیح و فرموله کردن «اهداف»، «آرمان ها»، «اولویت آرمان ها» و «محدودیت های آرمان ها» می باشد.

هدف اصلی این قسمت، ارائه تصویری مناسب از زمینه های کاربردی برنامه ریزی آرمانی می باشد، اما از آنجا که دستیابی به این هدف مستلزم آشنایی با برخی از مفاهیم اولیه برنامه ریزی آرمانی خطی است، ابتدا مرور مختصری در این خصوص ارائه شده، سپس انواعی از مدل های کاربردی برنامه ریزی آرمانی خطی تبیین می شود.

➤ اصطلاحات مدل برنامه ریزی آرمانی خطی

برنامه ریزی آرمانی خطی از جمله تکنیک های اساسی برای مدل هایی است که تصمیم گیرنده همزمان درصد دستیابی به چندین هدف می باشد. مسائل برنامه ریزی آرمانی مانند سایر مسائل می توانند به صورت خطی، غیر خطی و یا اعداد صحیح فرموله شده و انواعی مختلفی از خانواده مدل های برنامه ریزی آرمانی ارائه نمایند، آنچه در این قسمت به آن اشاره خواهد شد در ارتباط با برنامه ریزی آرمانی خطی بوده که از این به بعد به اختصار از عنوان «برنامه ریزی آرمانی» استفاده خواهد شد مگر صریحاً بر «عدد صحیح»، «غیر خطی» و یا مانند آن تاکید شده باشد.

به منظور ایجاد درکی روشن از مفاهیم برنامه ریزی آرمانی آشنایی با چند واژه زیر ضرورت دارد.

هدف: هدف عبارت است از یک بیان عمومی که منعکس کننده خواسته های تصمیم گیرنده در قالب روابط ریاضی باشد. مثلاً خواسته یک تصمیم گیرنده ممکن است در ارتباط با «حداکثر کردن سود» یا «حداقل کردن هزینه» باشد.

سطح تمایل: سطح تمایل عبارت است از یک مقدار عددی خاص همراه با یک سطح توفیق قابل قبول یا مطلوب برای هدف معین می باشد.

آرمان: هدف مرتبط با یک سطح تمایل را آرمان می نامند. مثلاً آرزوی «کسب سودی معادل X ریال» یا «کاهش هزینه ای معادل Y ریال» آرمان نامیده می شود. به این ترتیب «حداکثر کردن سود» یک هدف است، اما کسب سودی معادل ۱۰۰۰ واحد پولی یک آرمان می باشد.

متغیرهای انحراف از آرمان: دستیابی به سطح تمایل تعیین شده در یک هدف وابسته به امکانات، منابع، محدودیت ها و ... می باشد که در عمل ممکن است تصمیم گیرنده به سطح تمایل تعیین شده دست یابد یا نیابد. در بسیاری از موارد ممکن است بین آرزوها، تمایلات و خواسته های تصمیم گیرنده و آنچه که در عمل به آن می توان دست یافت، تفاوت و اختلاف وجود داشته باشد. این میزان تفاوت در مدل های برنامه ریزی آرمانی توسط متغیری که به آن متغیرهای انحراف از آرمان گفته می شود، اندازه گیری می شود. متغیرهای انحراف از آرمان را با d_i^+ و d_i^- به نمایش می گذاریم. d_i^- میزان عدم دستیابی به آرمان تعیین شده را نشان می دهد. مثلاً اگر آرمان تعیین شده توسط تصمیم گیرنده کسب سودی معادل ۱۰۰۰ واحد پولی باشد ولی او عملاً به سودی معادل ۸۰۰ واحد پولی دست یابد این میزان عدم توفیق $d_i^- = 1000 - 800 = 200$ بیان می شود. حال آنکه، اگر سود مکتسبه معادل ۱۲۰۰ واحد پولی باشد این میزان توفیق اضافی با $d_i^+ = 1200 - 1000 = 200$ نشان داده خواهد شد.

حالت	وضعیت متغیرهای انحراف از آرمان	توضیح
اول	$d_i^+ = 0$ و $d_i^- = 0$	دست یابی کامل به آرمان تعیین شده
دوم	$d_i^+ \neq 0$ و $d_i^- = 0$	پیشی گرفتن از آرمان تعیین شده
سوم	$d_i^+ = 0$ و $d_i^- \neq 0$	عدم دست یابی از آرمان تعیین شده
چهارم	$d_i^+ \neq 0$ و $d_i^- \neq 0$	این حالت ممکن نیست چون نمیتوان همزمان هم به ارمان نرسید و هم از آن پیشی گرفت

مثال : اگر سود شرکتی از رابطه $5x_1 + x_2$ محاسبه گردد.

الف: شرکت میخواهد دقیقاً ۱۲۰۰ دلار سود کند لذا $5x_1 + x_2 = 1200$ یعنی: $d_1^+ = 0$ و $d_1^- = 0$

ب: شرکت می‌خواهد حداقل ۱۲۰۰ دلار سود کند لذا $5x_1 + x_2 = 1200 + d_1^+$ یعنی $5x_1 + x_2 \geq 1200$, $d_1^- = 0$ و $d_1^+ > 0$

اگر امکان داشته باشد شرکت کمتر از ۱۲۰۰ نیز سود کند یعنی انحراف مثبت و منفی مجاز است. یعنی

$$5x_1 + x_2 - d_1^+ + d_1^- = 1200 \quad \text{لذا داریم} \quad 5x_1 + x_2 = 1200 + d_1^+ - d_1^-$$

با توجه به اینکه شرکت حداقل ۱۲۰۰ دلار سود می‌خواهد باید d_1^- را مینیمم کرد.

ج: شرکت می‌خواهد حداکثر ۱۲۰۰ دلار هزینه کند لذا $5x_1 + x_2 = 1200 - d_1^-$ یعنی $5x_1 + x_2 \leq 1200$, $d_1^+ = 0$ و $d_1^- > 0$

اگر امکان داشته باشد شرکت بیشتر از ۱۲۰۰ نیز هزینه کند یعنی انحراف مثبت و منفی مجاز است. یعنی

$$5x_1 + x_2 - d_1^+ + d_1^- = 1200 \quad \text{لذا داریم} \quad 5x_1 + x_2 = 1200 + d_1^+ - d_1^-$$

با توجه به اینکه شرکت حداکثر ۱۲۰۰ دلار می‌خواهد هزینه کند باید d_1^+ را مینیمم کرد

نوع آرمان	شکل محدودیت آرمان	متغیر انحراف از آرمان که باید حداقل شود
$Z \leq b$	$Z - d^+ + d^- = b$	d^+
$Z \geq b$	$Z - d^+ + d^- = b$	d^-
$Z = b$	$Z - d^+ + d^- = b$	d^+ و d^-

رسم معادلات آرمان

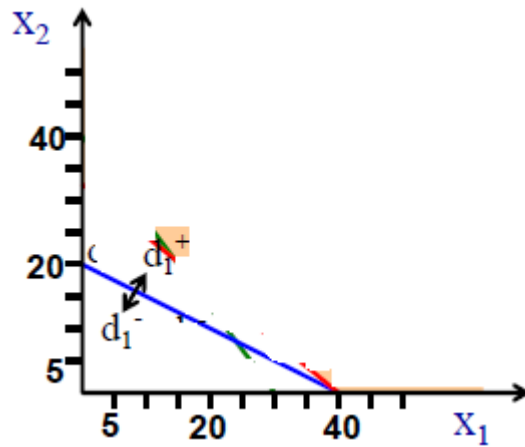
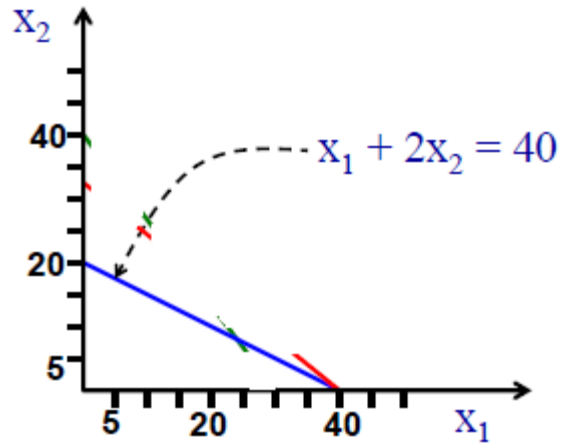
مرحله ۱: معادلات آرمان را بدون توجه به متغیرهای انحراف از آرمان رسم میکنیم

مرحله ۲:

- مقدار انحراف از آرمان برای نقاط روی خط برابر صفر است
- عدد سمت راست را افزایش داده و جهت d^+ را مشخص میکنیم
- عدد سمت راست را کاهش داده و جهت d^- را مشخص میکنیم

مثال: معادلات آرمان زیر را رسم کنید.

$$x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$$



برنامه ریزی آرمانی با اولویت تعیین شده:

فرموله کردن یک تابع هدف در برنامه ریزی آرمانی، نیازمند تخصیص سطح اولویت مناسب به آرمان انتخاب شده می باشد. تخصیص اولویت ها بر مبنای رابطه $P_k \gg P_{k+1}$ باید انجام بگیرد. که ترجیح آرمان k را بر $k+1$ نشان می دهد. هرگاه یک آرمان دارای اولویت برتری بر دیگری باشد این اولویت، اولویتی کامل و تمام عیار است به گونه ای که در مراحل حل، این آرمان تماماً و به طور کامل برآورده نشود توجهی به آرمان با اولویت بعدی نمی شود.

دقت کنید که اولویت ها در برنامه ریزی آرمانی نیازمند مقدار کمی دقیق نیستند بلکه اولویت ها بر اساس مطلوبیت ها و مزیت ها نسبی تعیین می گردد. در ایجاد اولویت یک رتبه بندی ترتیبی کفایت می کند در این مقیاس رتبه بندی ترتیبی اولویت ها از مهمترین به کمترین اولویت صورت می پذیرد.

رتبه بندی اولویت ها و سطوح تقدمی آرمان ها

رتبه اولویت	آرمان	عامل اولویت در مدل
۱	A	P_1 (برترین آرمان)
۲	B	P_2
۳	C	P_3
۴	D	P_4

مثال:

یک شرکت میتواند آگهی بازرگانی خود را در هنگام بازی های فوتبال و سریال پخش کند. هدف مشاهده تبلیغات توسط بینندگان بیشتر میباشد. جدول زیر تعداد بینندگان و هزینه ها را نشان میدهد.

هزینه	زنان با درآمد بالا	مردان با درآمد پایین	مردان با درآمد بالا	
۱۰۰	۵	۱۰	۷	مسابقه فوتبال
۶۰	۴	۵	۳	سریال

بودجه تبلیغات برابر ۶۰۰ است. در هریک از برنامه ها چند بار تبلیغ کنیم تا تعداد بینندگان حداکثر شود؟

متغیرهای تصمیم:

X_1 تعداد تبلیغات در فوتبال

X2 تعداد تبلیغات در سریال

$7x_1+3x_2$ تعداد مردان با درآمد بالا که تبلیغات را نگاه میکنند

$10x_1+5x_2$ تعداد مردان با درآمد پایین که تبلیغات را نگاه میکنند

$5x_1+4x_2$ تعداد زنان با درآمد بالا که تبلیغات را نگاه میکنند

لذا برنامه ریزی چند هدفه داریم:

$$\text{Max}\{7x_1+3x_2, 10x_1+5x_2, 5x_1+4x_2\}$$

s.t.

$$100x_1+60x_2 \leq 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

این مساله را میتوان با روش معیار جامع حل کرد (حل کنید)

حال فرض کنید تعداد مردانی با درآمد بالا که تبلیغات را نگاه میکنند حداقل ۴۰ نفر باشند و تعداد مردان با درآمد پایین که تبلیغات را نگاه میکنند حداقل ۶۰ نفر باشند و تعداد زنان با درآمد بالا که تبلیغات را نگاه میکنند حداقل ۳۵ نفر باشند لذا اهداف به آرمان تبدیل میگردند و داریم

$$7x_1+3x_2 \geq 40, \quad 10x_1+5x_2 \geq 60, \quad 5x_1+4x_2 \geq 35$$

لذا مدل برنامه ریزی آرمانی به صورت زیر میباشد:

$$\min z = d_1^- + d_2^- + d_3^-$$

s t.

$$7x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$$

$$10x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60$$

$$5x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 35$$

$$100x_1 + 60x_2 \leq 600$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$$

مساله فوق را حل کنید.

حال فرض کنید امکان هزینه بیشتر از ۶۰۰ ممکن باشد و اولویت مهم باشد و به صورت زیر باشد

P1 هزینه بیشتر از ۶۰۰

P2 تعداد مردانی با درآمد بالا که تبلیغات را نگاه میکنند

P3 تعداد مردان با درآمد پایین که تبلیغات را نگاه میکنند

P4 تعداد زنان با درآمد بالا که تبلیغات را نگاه میکنند

لذا برنامه آرمانی به صورت زیر میباشد

$$\min z = p_1 d_4^+ + p_2 d_1^- + p_3 d_2^- + p_4 d_3^-$$

s t.

$$7x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$$

$$10x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60$$

$$5x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 35$$

$$100x_1 + 60x_2 + d_4^- - d_4^+ = 600$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, d_4^-, d_4^+ \geq 0$$

مساله فوق را حل کنید.

تمرینات نظریه بازی ها

۱- مفهوم نقطه زینی و وجود آنرا در یک مسئله بازی به طور کامل بیان کنید. روی جداول زیر که مربوط به برد بازیکن سطری می باشد، مسئله برنامه ریزی خطی هر یک از بازیکنان را با ذکر جزئیات بنویسید. همچنین با استفاده از روش گفته شده برای حالت دو استراتژی مسئله را حل کنید.

	استراتژی ۱	استراتژی ۲	استراتژی ۳
استراتژی ۱	۳	۵	۱
استراتژی ۲	-۳	-۲	۲

	استراتژی ۱	استراتژی ۲	استراتژی ۳
استراتژی ۱	۱	۴	۳
استراتژی ۲	۵	۲	۳

	استراتژی ۱	استراتژی ۲	استراتژی ۳
استراتژی ۱	2	-1	3
استراتژی ۲	0	4	2
استراتژی ۳	-2	1	-1

۲- جدول زیر را در نظر بگیرید که مربوط به بازی "سنگ کاغذ قیچی" می باشد. در این بازی مقدار برد با ۱ و باخت با ۱- نشان داده شده است. جدول مربوط به برد بازیکن سطری است. در حالتی که دو بازیکن همزمان یک نوع استراتژی را انتخاب کنند میزان برد هر کدام برابر با ۰ خواهد بود. مساله هر دو بازیکن را بنویسید و استراتژی بهینه هر یک را تعیین کنید. **(در کلاس حل تمرین**

حل شده است)

	سنگ	کاغذ	قیچی
سنگ	۰	-۱	۱
کاغذ	۱	۰	-۱
قیچی	-۱	۱	۰